XI Quantenoptik: Photon-Statistik

Bisher semiklassischer Ansatz, d.h. Teilchen wurden quantenmechanisch behandelt und das Feld klassisch.
Ansatz ist ausreichend für die meisten Probleme der Festkörperphysik.

Ausnahmen: - spontane Emission (quantenmechanischer Effekt)
→ Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Felds (Energie-Zeit Unschärfe)

- nicht-klassische Zustände des Lichts
z.B. bei einem Einzelphoton-Emitter

Geburtsstunde der Quantenoptik 1900 Planck's Strahlungsgesetz
1905 Einstein photoelektrischer Effekt

Hamilton-Operator

$$H = \hbar\omega\left(\underbrace{b^+b}_{n} + \frac{1}{2}\right)$$ in Analogie zum harmonischen Oszillator

Photon ≙ Quant des elektromagnetischen Felds mit der Energie $\hbar\omega$

$\underline{n} = b^+b$ Photonenzahl-Operator

b^+, b Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Photonen

Schrödinger-Gleichung

$$H \phi_n = E_n \phi_n$$

Eigenenergien $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

Eigenfunktionen: $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^n \phi_0$

beschreiben einen Zuständen mit n Photonen

Vakuum-Zustand $|0\rangle$

Photonzahl-Operator $\quad \underline{n}\, \phi_n = n\, \phi_n$

$$b\, \phi_n = \sqrt{n}\, \phi_{n-1}$$

$$b^+ \phi_n = \sqrt{n+1}\, \phi_{n+1}$$

Allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$\phi(t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

Überlagerung der Eigenfunktionen ϕ_n mit den Koeffizienten c_n, wobei $|c_n|^2$ der Wahrscheinlichkeit entspricht, bei einer Messung n Photonen zu finden

Charakterisierung von Strahlungsfeld-Zuständen

I Fockzustand ϕ_n (Besetzungszahl-Zustand)

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^n \phi_0$$

entsteht z.B. bei spontaner Emission.

Nicht-klassisches Licht

Licht-Zustände charakterisiert durch mittlere Photonzahl $\langle n \rangle = \bar{n}$ und Varianz (Quadrat der Standardabweichung)

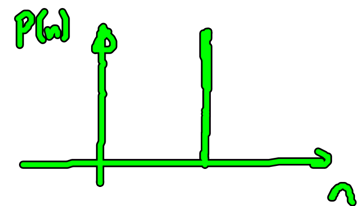
$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2$$

Fockzustand:

$$\bar{n} = (\phi_n, \underline{n}\,\phi_n) = n\,(\phi_n, \phi_n) = n$$

$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 = (\phi_n, \underline{n}^2\,\phi_n) - n^2 = n^2 - n^2 = 0$$

d.h. im Fockzustand ist die Photonzahl scharf gegeben. Es liegen genau n Photonen vor. Die Schwankung um den Mittelwert ist Null.



II Kohärenter Zustand (Glauber Zustand)

Beispiel: Laserlicht (konstante Phase, Amplitude und Frequenz)

→ stabilstes klassisches Licht

Eine allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung kann durch Überlagerung von Photonenzahl-Zuständen (Fock-Zuständen) ϕ_n aufgebaut werden.

Glauber Zustand

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|\phi_n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|\phi_n\rangle$$

Diese Zustände sind so definiert, dass die Heisenberg Unschärfe minimal ist, d.h. $\Delta p\, \Delta q = \frac{\hbar}{2}$

Falls die Minimierung der Unschärfe von einer Größe auf Kosten der anderen geht: squeezed coherent states (gequetschte Zustände)

Glauber-Zustände sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators, d.h.

$$b\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$$

Explizit Form von $|\alpha\rangle$ folgt damit direkt:

$$|\alpha\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\alpha\rangle$$
$$= \sum_n |\phi_n\rangle\langle 0|\alpha\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

$$\langle\phi_n| = \langle 0|\frac{b^n}{\sqrt{n!}}$$

Normierung: $\langle\alpha|\alpha\rangle \overset{!}{=} 1 = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}}$

$$\Rightarrow \quad |\langle 0|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}$$

Damit folgt:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\phi_n\rangle$$

Für Glauber-Zustände gilt

$$\langle n\rangle = \bar{n} = (\phi_\alpha, b^+ b\, \phi_\alpha) = \alpha^* \alpha = |\alpha|^2$$

$$\Delta n^2 = \langle n^2\rangle - \bar{n}^2 = (\phi_\alpha, \underbrace{(b^+b)^2}_{b^+b\,\underbrace{b\,b^+}_{b^+b+1}\,b}\phi_\alpha) - |\alpha|^4$$

$$= (\phi_\alpha, b^+b^+bb + b^+b, \phi_\alpha) - |\alpha|^4$$
$$= \cancel{|\alpha|^4} + |\alpha|^2 - \cancel{|\alpha|^4} = |\alpha|^2 = \bar{n}$$

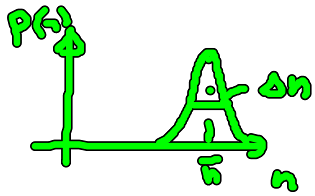
Wahrscheinlichkeit n Photonen bei kohärentem Licht zu messen

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = |c_n|^2 = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

Poisson-Verteilung

mit $|\alpha|^2 = \bar{n}$ als mittlere Photonzahl

und mit der Breite $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$ (Standardabweichung)



III Thermischer Zustand

Beispiel: Sonnenlicht

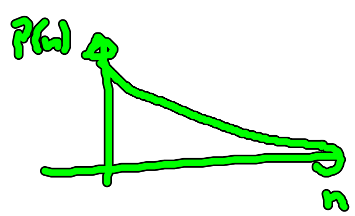
Thermisches Licht lässt sich nicht über einen reinen Zustand definieren. Der Erwartungswert wird über den statistischen Operator definiert

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} \quad \text{wobei} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

↗ Zustandssumme

Mittlere Photonzahl $\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$ entspricht der Bose-Einstein Verteilung.

$$\Delta n^2 = \bar{n} + 2\bar{n}^2 > \bar{n} \text{ bei kohärentem Licht}$$
(Poisson-Statistik)



Bose-Einstein

Photon-Statistik

- Glauber Zustand (kohärenter Zustand)

Laserlicht

Poisson-Verteilung mit Breite $\sqrt{\bar{n}}$

Photonen treten unkorreliert bzw. zufällig auf.

|| | | | | Detektor

- Thermisches Licht

Sonnenlicht

Super-Poisson-Statistik mit Breite $> \sqrt{\bar{n}}$

Photonen treten "geklumpt" auf (bunching)

|||| |||| ||| Detektor

- Nicht-klassisches Licht

Fock-Zustand (Einzelphoton-Emitter)

Sub-Poisson-Statistik mit $< \sqrt{\bar{n}}$

Photonen treten vereinzelt auf (anti-bunching)

| | | Detektor

Photonenzahl-Verteilung