Theoretische Physik $\overline{\underline{II}}$ – Quantenmechanik

Andreas Knorr

EW 742, Di 13-14 Sprechstunde

Anmeldung MOSES

VL Di / Mi $8^{15} - 9^{45}$

EW 201

I Einführung und historischer Abriß

1.) Was bisher geschah ...

Klass. Mechanik

Teilchen, Bahnkurve

$$\underbrace{\vec{r} = \vec{r}(t), \ \vec{p} = \vec{p}(t)}$$

Newtongleichung

Klass. Elektrodynamik

Wellenfelder, Intensitäten

$$\underbrace{I(\vec{r}, t), \ \text{Dispersionsrelation} \ \omega = \omega(\vec{k})}$$

Maxwellgleichungen

Konzept: Teilch + Welle stehen nebeneinander

Quantenmechanik führt zu Vereinheitlichung der Begriffe

(auch später QM II)

Beobachtg. v. Objekte auf atomarer Skala zwingt

zur Vereinheitlichg. der Begriffe..

2. Historischer Verlauf

- 1859 Gustav Kirchhoff: Strahlg. eines Körpers bei Temperatur T, Energiedichte $\rho(\omega)$ als Fkt der Frequenz

- 1900 Max Planck: empirische Formel

$$\rho(\omega) \sim \frac{(\hbar\omega)^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \qquad (\text{TP } \underline{\text{IV}})$$

$\uparrow$ Boltzmann konstante

Theoretische Ableitg.:

Materie als Oszillator beschrieben wurde

die nur Energieportion $\Delta E = \hbar\omega$ auf und abgeben kann

- 1905 Albert Einstein : Quantenhypothese f. Licht (Photoeffekt)

- 1907/11 Einstein, Peter Debye : spezifische Wärme

- 1923 Arthur Compton : Röntgenstrahlg. verhält bei Streuung an Elektronen wie Teilchen (Beschreibg. wie Billardkugeln)

  Licht als Teilchen

- 1928 Davisson - Germer : Elektronenbeugg. an Festkörperoberflächen

  Elektronen als Welle

- 1923 de Broglie Verbindg. v. Welle und Teilcheneigenschaften

Impuls - Wellenlänge : $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda_B}$

$\vec{p}$: Impuls d. Teilchens

$\vec{k}$: Wellenvektor d. Welle

λ_B: de Broglie Wellenlänge

kinet. Energie – Frequenz : $\dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \hbar\omega$

kinet. Energie d. Teilch. — Frequenz der zugeordneten Welle

Anwendg. auf Teilchen: Wann ist Welleneigenschaft wichtig?

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{\left(\hbar \frac{2\pi}{\lambda_B}\right)^2}{2m} \longrightarrow \lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{mv}$$

wenn Objekt auf der Größenordng. v. λ_B untersucht wird, wird Welleneigenschaft wichtig!

Kegelkugel: $1\,\mathrm{kg}$, $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \rightarrow \lambda_B = 10^{-34}\,\mathrm{m}$

Elektron $10^{-30}\,\mathrm{kg}$, $10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \rightarrow \lambda_B = 10^{-10}\,\mathrm{m} \sim 1\,\mathring{A}$

Zur Beobachtg. v. Welleneffekt muß Teilchen auf der de Broglie λ_B beobachtet werden.

• 1911 Rutherfordsch Atommodell

Elektron auf Bahn um kleinen Kern

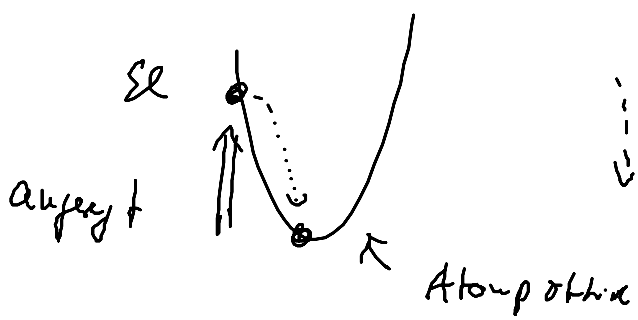
→ ist große Herausforderg. f. Theorie

weil klass. Mech. + ED das nicht liefert

∄ stabile Atome wegen Abstrahlg. durch

beschleunigte Bewegung d. Elektrons

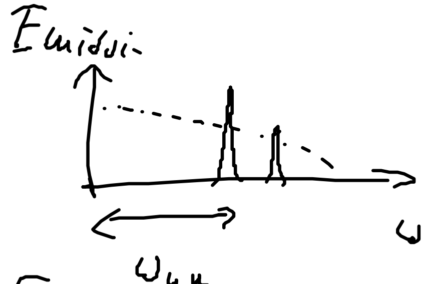
ebenso sollte bei Anregg. im klass. Potential



≙ kontinuierliche Frequenzverteilg.

↯ Exp.

Experiment: diskrete Spektren



empirisch: $\omega_{nm} = \dfrac{E_n - E_m}{\hbar}$

m, n : natürliche Zahl, durchnummerierbar

H-Atom $E_n \sim \frac{1}{n^2}$

Balmer d. H-Atoms

- ab 1913: Bohr-Sommerfeld Theorie

f. Atomspektren durch modifizierte Hamilton theorie

Phase integral $\oint d\vec{q} \cdot \vec{p}(\vec{q}) = \hbar n \quad \rightarrow E_n = \frac{m e^4}{2\hbar n^2}$

Linie-integral über periodische Bahn d. Elektrons

Hamilton-variable

bestimmt die erlaubte Bahnen

konnte nicht verallgemeinert werden

- Stark- und Zeeman effekt: Aufspaltg. d. Spektrallinien im elektrisch und magnetisch Feld → und mehr unverstand. Daten

- 1925 Werner Heisenberg erste funktionierende Quantenmechanik

„physikalische Theorie sollte sich an beobachtbaren Größen orientieren"

Bahnkurve $x(t)$ sollte nicht auftauchen (nicht beobachtet)

beobachtet ist ω_{nm}

$$x(t) \longrightarrow X_{nm}(t) = \underbrace{X_{nm}(0)\, e^{i\omega_{nm} t}}_{\text{periodischer Vorgang}}$$

$(n,m) \to$ Matrix

Geschwindigkeit

$$V_{nm}(t) = \dot{X}_{nm}(t) = i\omega_{nm} X_{nm}(t)$$

$E_n = \hbar\omega_n$

$$= i(\omega_n - \omega_m) X_{nm}(t)$$

$$= i(\underbrace{\omega_n X_{nm}}_{\frac{\hbar}{\hbar}\sum_i \omega_i \delta_{in} X_{im}} - X_{nm}\omega_m)$$

$$\frac{\hbar}{\hbar}\sum_i \omega_i \delta_{in} X_{im} = \frac{1}{\hbar}\underline{\underline{\sum_i H_{ni} X_{im}}}$$

$\nearrow$ 1

$$H_{ni} = \hbar\omega_i \delta_{in}$$

Matrixprodukt

$$\boxed{\dot{\hat{X}} = \frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}\hat{X} - \hat{X}\hat{H}\right) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{X}\right]}$$

Matrixgleichung für $\hat{X}$ Kommutator $\equiv (\hat{H}\hat{X} - \hat{X}\hat{H})$

Was ist H? H hat Beziehg. zur Energie denn

Bewegungsgl. d. Heisenbergschen QM,

muß H physikalische Größe mit Stabilität haben

insbesond. $\hat{X} = \hat{H} \rightarrow \dot{\hat{H}} = 0 \;\hat{=}$ Energiematrix in konservativem System

∘ 1926: Erwin Schrödinger <u>Haus Arosa</u> Weihnachtsferien 1925

Gleichg. f. Materiewellen $\Psi(\vec{r}, t)$

<u>Idee</u>: experimentelle Befunde mit ein beziehen:

a) Interferenzen v. Elektronenwellen sollte existieren

$\rightarrow \Psi = \Psi_1 + \Psi_1$ sollte Lsg. sein

wenn Ψ_1, Ψ_2 Lsg. sind

$\Longrightarrow$ linear Dgl. gesucht

b) möglichst einfach: Anfangsverteilg. soll ausreichend sein, um $\Psi(\vec{r},t)$ zu bestimmen $\rightarrow$

$\Longrightarrow$ Dgl. 1. Ordg. in Zeit: $\Psi(\vec{r}, t=0)$ als AB

c) de Broglie Beziehg sollen gelten

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \qquad \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \hbar\omega$$

zu a) ebene Welle Lösung: $\Psi(\vec{r},t) = \Psi_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

Amplitude

nach c) $\Psi = \Psi_0 \, e^{i\left(\vec{p}\cdot\vec{r} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} t\right)\frac{1}{\hbar}}$

$$\underbrace{\partial_t \Psi = -\frac{i}{\hbar}\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\Psi \qquad \vec{\nabla}^2 \Psi = -\frac{\vec{p}^{\,2}}{\hbar^2}\Psi}_{\vec{p}^{\,2} \text{ eliminieren}}$$

$$\boxed{i\hbar\,\partial_t \Psi(\vec r,t) = -\frac{\hbar^2 \vec\nabla^2}{2m}\,\Psi(\vec r,t)}$$

Schrödingergleichg. f. Teilchen im freien Raum

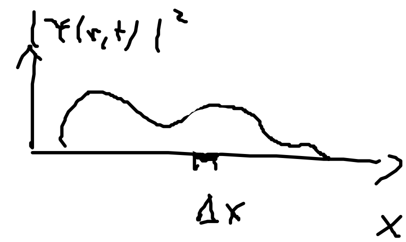
$$\vec\nabla\cdot\vec\nabla = \Delta$$

partielle Dgl. f. Wellenfunktion $\Psi(\vec r,t)$ $\rightarrow$ Interpretationsproblem

$\Psi(\vec r,t)$ ist komplex!

∘ 1926 Max Born

a) $|\Psi(\vec r,t)|^2$ ist das Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des beschriebenen Objekts



b) $|\Psi(\vec r,t)|^2\, dV \;\hat{=}\;$ Wahrscheinlichkeit Teilchen in dV zu finden

(oder 1d: im Intervall dx)

c) im gesamten Raum: $$\int_{V_{gesamt}} dV\, |\Psi(\vec r,t)|^2 = 1$$

Normierungsbedingg. d. Wellenfunktion