4.5. Messprozess und Bedeutung von Eigenfunktion / werten

Frage nach physikalischer Bedeutung von ψ_n, a_n

bei Eigenwertproblem $\underline{A}\,\psi_n = a_n \psi_n$

a) kurzer Kurs Wahrscheinlichkeitstheorie

- $w(x)\,dx$ sei Wahrscheinlichkeit, daß Ereignis im Intervall $[x, x+dx)$ gefunden wird

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, w(x) = 1 \quad \text{normiert} \right)$$

Def 1 n-te Moment der Verteilung

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n w(x) = \langle x^n \rangle$$

Def 2 charakteristische Funktion $\chi(\tau)$

$$\chi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ix\tau}\, w(x)$$

Fouriertrafo der Wahrscheinlichkeit

$\chi(\tau)$ als Funktion der Momente darstellen:

$$\chi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, w(x) \sum_n \frac{1}{n!} (-i x \tau)^n$$

$$\chi(\tau) = \sum_n m_n \frac{(-i\tau)^n}{n!}$$

aus den Momenten kann man χ berechnen

und aus χ kann man w berechnen:

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} e^{-ix\tau} \chi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi} e^{ix\tau} \sum_n m_n \frac{(-i\tau)^n}{n!}$$

Rücktrafo

Def 3 Mittelwert einer Größe $F(x)$

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, w(x)\, F(x)$$

in Quantenmechanik:

$+\infty$

$$\langle F(\underset{\sim}{\vec{r}}, \underset{\sim}{\vec{p}}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \; \Psi^*(\vec{r}, t) \, F(\underset{\sim}{\vec{r}}, \underset{\sim}{\vec{p}}) \, \Psi(\vec{r}, t)$$

z.B Energie

Raum

symmetrische Schreibweise

b) Anwendung auf QM

Postulat: Jeder beobachtbaren Größe A wird ein hermitescher Operator zugeordnet

Ziel: Wahrscheinlichkeitsverteilg. bei Messg. ermitteln

$W(a)$ wird erhalten wenn A gemessen wird

Wahrscheinlichkeit

reelle Zahl

$$\boxed{\text{Was ist } a, w\,?}$$

(i) System befindet sich in Eigenzustand von $\underset{\sim}{A}$

$$m_n = \langle \underset{\sim}{A}^n \rangle = (\Psi_m, \underbrace{\underset{\sim}{A}^n \Psi_m}) = a_m^n (\Psi_m, \Psi_m) = a_m^n$$

$\langle F \rangle$

$$\underset{\sim}{A} \Psi_m = a_m \Psi_m$$

$$\underset{\sim}{A}^n \Psi_n = a_m^n \Psi_m$$

$$m_n = a_m^n$$

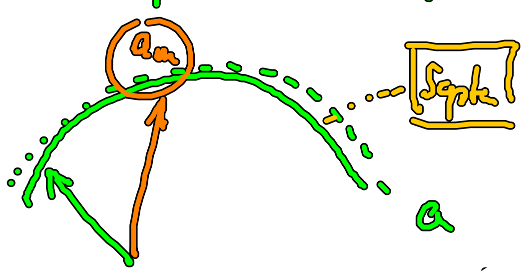
siehe oben

$$\chi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\tau)^n a_m^n}{n!} = e^{-i\tau a_m}$$

$$w(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{2\pi}\, e^{ia\tau}\, e^{-i\tau a_m} = \delta(a - a_m)$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Werte im Experiment

wenn man A mißt und das gemessene System im Eigenzustand ψ_m ist so findet man f. die Verteilung eine δ-Fkt.



$\Longrightarrow$ der Messwert ist a_m

z.B. $a = E$, wenn $\underline{H} = \underline{A}$
(Energie)

daß nur hermitesche Operatoren zugelassen als Observable, weil diese reelle Eigenwerte haben.

(ii) System befinde sich in beliebigem Zustand ψ zur Messzeit t

$$\psi = \sum_m c_m \psi_m(\vec r)$$ Entwicklg. in den

↑ Eigenfunktion der Observablen $\underline{A}$

$a^n_{m'}$

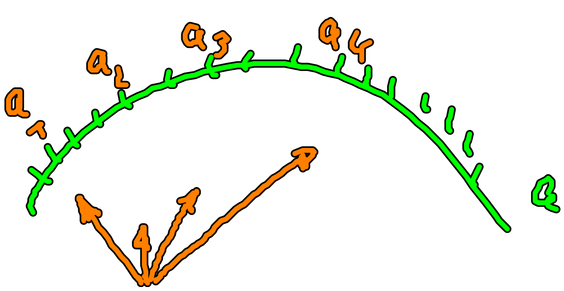
$$m_n = \langle \underline{A}^n \rangle = (\psi, \underline{A}^n \psi) = \sum_{m,m'} (c_m \psi_m, \underline{A}^n c_{m'} \psi_{m'})$$

$$= \sum_{m,m'} c_m^* c_{m'} a^n_{m'} \underbrace{(\psi_m, \psi_{m'})}_{\delta_{mm'}} = \sum_m |c_m|^2 a_m^n$$

$$\chi(\tau) = \sum_n \frac{(-i\tau)^n}{n!} \sum_m |c_m|^2 a_m^n = \sum_m |c_m|^2 \underbrace{\sum_n \frac{(-i\tau)^n}{n!} a_m^n}_{e^{-i\tau a_m}}$$

$$= \sum_m |c_m|^2 e^{-i\tau a_m}$$

$$W(a) = \sum_m |c_m|^2 \delta(a - a_m)$$ ≙ Wahrscheinlichkeitsverteilg. der Messwerte



$$c_m = \int d^3r\, \psi_m^*(\vec r)\, \psi(\vec r)$$

Wenn sich System in Zustand $\psi(\vec r) = \sum_m c_m \psi_m(\vec r)$

dann mißt man die Werte a_m aus $\underline{a}$ an Messgerät mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $|c_m|^2$.

$$\int da\, w(a) \overset{!}{=} \underline{\underline{1}} = \sum_m |c_m|^2$$

Konsistenzprüfung.

Ortsmessung sollte f. $|c_m|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$

kontinuierliches Spektrum des Ortsoperators

$$\underline{\vec{r}}\, \delta(\vec{r}-\vec{\xi}) = \vec{\xi}\, \delta(\vec{r}-\vec{\xi})$$

← Eigenfunktion $\psi_{\vec{\xi}} = \delta(\vec{r}-\vec{\xi})$

Ortsoperator $\underline{\vec{r}} = \vec{r}$

3d Vektor mit reellen Zahlen

orthonormal

vollständig

$$\psi(\vec{r}) = \underbrace{\sum_m c_m \psi_m}_{} = \int d^3\xi\, C(\vec{\xi})\, \delta(\vec{\xi}-\vec{r}) = C(\vec{r})$$

Ortsmessg.

für Ort auswerten

Übersetzung ins Kontinuierliche

$|C(\vec{r})|^2$ interpretieren als die Wahrscheinlichkeit(sdichte) Teilchen am Ort $\vec{r}$ zu finden

$$\boxed{|C(\vec{r})|^2 = |\psi(\vec{r})|^2}$$

(iii) Folge f. Messprozess

- Messg. einer Observable $\underline{A}$ zeigt a_m an

$\rightarrow$ das System muß sich im Eigenzustand ψ_m befinden

- offensichtlich findet durch Messung eine „Reduktion der Wellenfunktion" $\psi(\vec{r}) = \sum_n c_n \psi_n(\vec{r})$ in ψ_m statt:

$$\psi \xrightarrow[\text{Messg.}]{} \psi_m$$

die Reduktion findet bei Messg. mit Wahrscheinlichkeit $|c_m|^2$ statt, Messg. legt den Zustand als Eigenzustand fest

4.6. Die allgemeine Unschärferelation u. Messbarkeit

Einung. bei Wellenpaket $\underline{\Delta x}\, \underline{\Delta p} \geq \frac{\hbar}{2}$

a) Beweis f. beliebige Operatoren:

$$\Delta A = \left(\langle (\underline{A} - \langle \underline{A} \rangle)^2 \rangle \right)^{1/2}$$

2 Operatoren: $\underline{A}_1, \underline{A}_2$

$$\boxed{\Delta A_1 \cdot \Delta A_2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\underline{A}_1, \underline{A}_2] \rangle \right|}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \left| \langle \underbrace{[x, p_x]}_{i\hbar} \rangle \right| = \frac{\hbar}{2}$$

2 Messgrößen A_1, A_2 sind dann simultan beliebig genau in einer Messg. festzulegen wenn ihr Kommutator verschwindet

Beweis Operatorschwankung um Mittelwert: $\Delta \underline{A}_i = \underline{A}_i - \underbrace{\langle \underline{A}_i \rangle}_{(\psi, \underline{A}_i \psi)}$

nutzen: $|(\varphi_1, \varphi_2)|^2 \leq (\varphi_1, \varphi_1)(\varphi_2, \varphi_2)$

Schwarzsche Ungleichung

setze: $\varphi_1 = \Delta \underline{A}_1 \psi$, $\varphi_2 = \Delta \underline{A}_2 \psi$ (wählen)

$$|(\Delta \underline{A}_1 \psi, \Delta \underline{A}_2 \psi)|^2 \leq (\Delta \underline{A}_1 \psi, \Delta \underline{A}_1 \psi)(\Delta \underline{A}_2 \psi, \Delta \underline{A}_2 \psi)$$

hermitesch

$$|(\psi, \Delta \underline{A}_1 \Delta \underline{A}_2 \psi)|^2 \leq (\psi, \Delta \underline{A}_1^2 \psi)(\psi, \Delta \underline{A}_2^2 \psi)$$

Nebenbemerkung: Produkt zweier Operatoren $\underline{B}_1, \underline{B}_2$

kann man wie folgt schreiben.

$$\underline{B}_1\underline{B}_2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\underline{B}_1\underline{B}_2 + \underline{B}_2\underline{B}_1\right)}_{[\underline{B}_1,\underline{B}_2]_+} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\underline{B}_1\underline{B}_2 - \underline{B}_2\underline{B}_1\right)}_{[\underline{B}_1,\underline{B}_2]_-}$$

hermitesch (bei adjungieren bleibt das so)

antihermitesch (bei adjungieren taucht Minus auf)

Produkt v. Operatoren: adjungieren:

$$(\underline{B}_1\underline{B}_2)^+ = \underline{B}_2^+\underline{B}_1^+$$

, adjungieren war:

$$\int \varphi^* B \psi \overset{!}{=} \int (B^+\varphi)^* \psi$$

gerade

d.h.: $\int \varphi^* (B_1 B_2) \psi = \int (B_1^+ \varphi)^* B_2 \psi = \int (B_2^+ B_1^+ \varphi)^* \psi$

wenn beide hermitesch

$$\int \left(\underline{\underline{(B_1 B_2)^\dagger}} \psi \right)^* \psi = \int \left(\underline{\underline{B_2^\dagger B_1^\dagger}} \psi \right)^* \psi$$

$$\boxed{(B_1 B_2)^\dagger = B_2^\dagger B_1^\dagger} = B_2 B_1$$

Adjungieren eines Produkts.

Ende Nebenbemerkung!

$$|\underbrace{(\psi, \Delta A_1 \Delta A_2 \psi)}|^2 \le (\psi, \Delta \underline{A}_1^2 \psi)(\psi, \Delta \underline{A}_2^2 \psi)$$

$$(\psi, (\Delta \underline{A}_1 \Delta \underline{A}_2 + \Delta \underline{A}_2 \Delta \underline{A}_1) \psi) \frac{1}{2}$$ hermitesch → rein reell

$$+ (\psi, (\Delta A_1 \Delta A_2 - \Delta A_2 \Delta A_1) \psi) \frac{1}{2}$$ antihermitesch → rein imaginär

oben Beweis

weggelassen, weil Ungleichung.

$$\cancel{\frac{1}{4} |(\psi, [\Delta \underline{A}_1 \Delta \underline{A}_2]_+ \psi)|^2} + \frac{1}{4} |(\psi, [\underbrace{\Delta \underline{A}_1, \Delta \underline{A}_2}_{[\underline{A}_1, \underline{A}_2]}]_-)|^2$$

1

$$\le \underbrace{(\psi, \Delta \underline{A}_1^2 \psi)} \underbrace{(\psi, \Delta \underline{A}_2^2 \psi)}$$

ΔA_1^2 ΔA_2^2 2

Wund ziehe

1 2

$$\frac{1}{2} \left| [A_1, A_2] \right| \leq \Delta A_1 \Delta A_2$$