

## 4.2 Anwendung des Störereffekt auf H-Atom

- untersten Zustände des Wasserstoffatoms:

$$n=2 \quad \text{————} \quad (4) \quad 2s, \quad 2p_x, \quad 2p_y, \quad 2p_z$$
$$m=0 \quad \quad \quad -1 \quad +1 \quad 0$$
$$L=0 \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \quad \quad \quad$$
$$l=1$$

$$n=1 \quad \text{————} \quad (1) \quad 1s$$
$$m=0$$
$$L=0$$

Das  $W_{ij}$  führt auf Dipolübergänge / magnetischen

$$\rightarrow W_{ij} = q \int d^3r \varphi_i^*(r) \vec{r} \varphi_j(r)$$

für  $i \neq j$ :  $W_{ij} \neq 0$ ,  $W_{ii} = 0$

Für linear polarisiertes Feld gilt:

$$\Delta m = 0, \quad \Delta l = \pm 1 \quad (\text{ex. kein zirkularer Übergang})$$

$$2s \quad 2p_x \quad 2p_y \quad 2p_z$$

$2s$	$0$	$0$	$0$	$W$
$2p_x$	$0$	$0$	$0$	$0$
$2p_y$	$0$	$0$	$0$	$0$
$2p_z$	$W$	$0$	$0$	$0$

→ Nur  $W_{2s, 2p_z}$  ist einzig überlebende

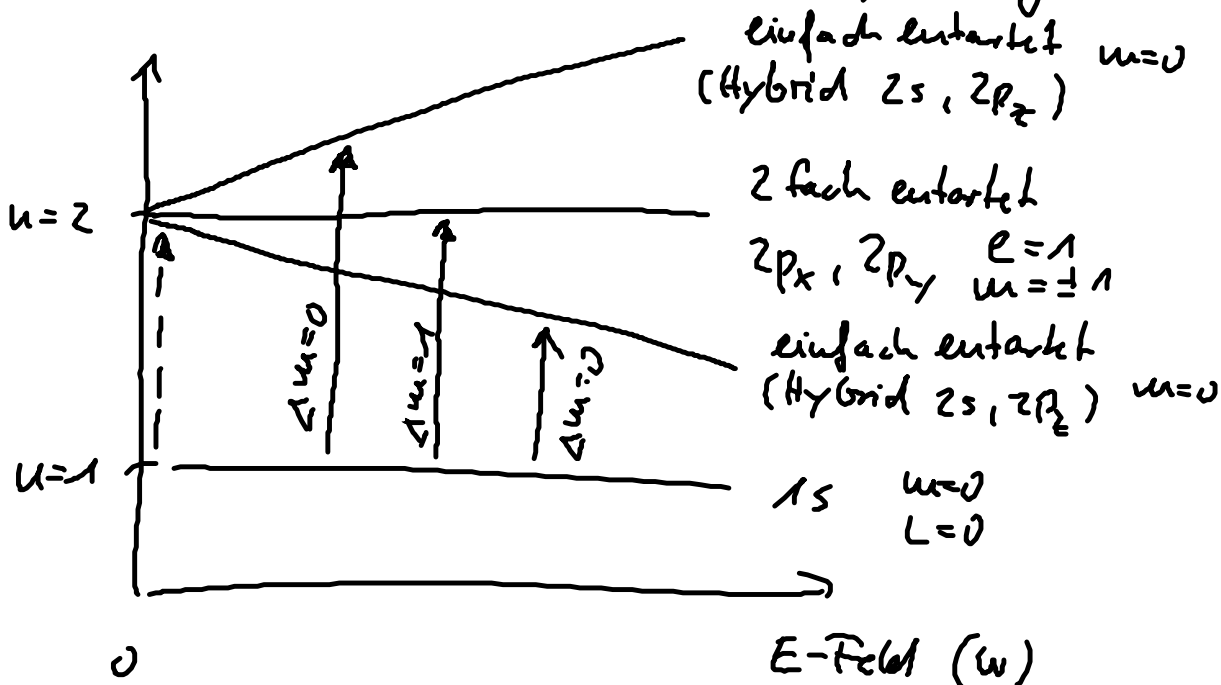
Matrixelement (erfüllt  $\Delta l = \pm 1$   
 $\Delta m = 0$ )

→ eff. ZNS

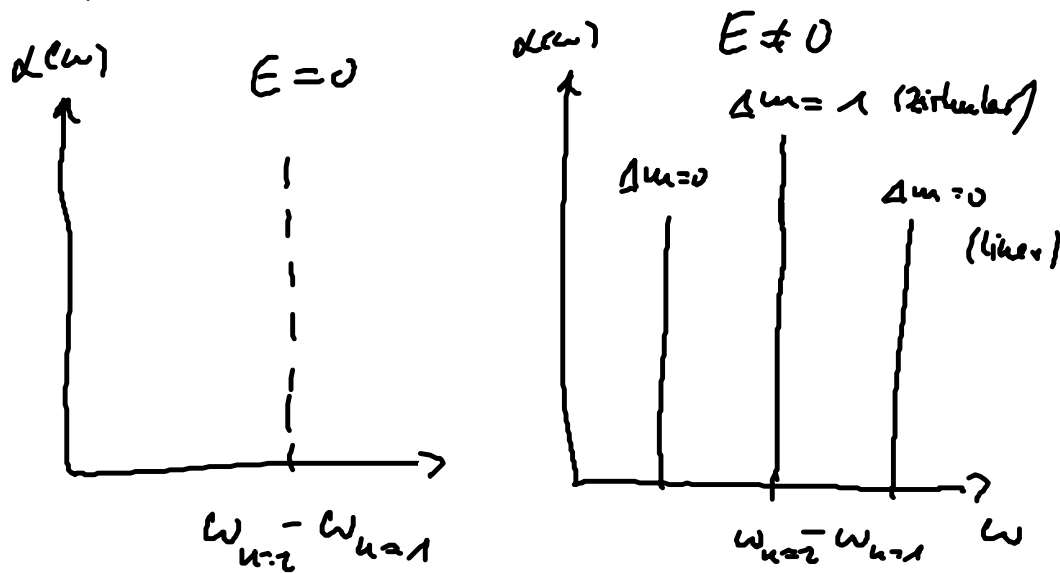
$$\Rightarrow E_{\pm} = E_{n=2} \pm \frac{1}{2} \left( 4 |W_{2s, 2p_z}|^2 \right)^{1/2}$$

$$= E_{n=2} \pm |W_{2s, 2p_z}|$$

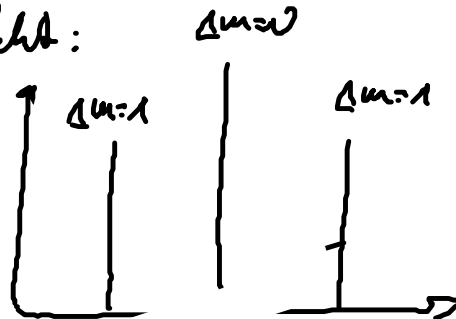
damit erfolgt Energieaufspaltung:



• Spektrum :



→ Vgl. Zeeman effekt:  $\Delta m = 0$



• physikalische Erklärung:

Statt Kugel-, gilt jetzt Zylindersymmetrie  
(wir zeichnen mit E-Feld eine Richtung aus)

→ aus 3-facher Entartung wird 2fache

• Besonderheit NUR im H-Atom:

- es besteht nur  $l$ -Entartung

- es tritt ein linearer Stark Effekt auf

→ sonst quadrat. Stark Effekt, weil

keine (diagonalen) Dipolmomente zur  
selben Energie

## 5. Optischer Stark Effekt: (Ultraschnelloptik)

zeitabh. Anregung eines ZNS mit el. Feldern

Bei zeitabh. WW ( $\underline{W} = \underline{W}(t)$ ) starten wir  
mit Koeffizientgl. für die  $c_i(t)$

$$\text{aus } \Psi(r, t) = \sum_i c_i(t) \varphi_i(r)$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{Hamiltonian: } \underline{H} &= \underline{H}_{\text{Atom}} + \underline{W}(t) \\ &= \underline{H}_{\text{Atom}} - \vec{d} \cdot \vec{E}(t) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \underline{H}_{\text{Atom}} \varphi_i = \varepsilon_i \varphi_i, \quad \vec{d} = q \vec{r}$$

$$\cdot \text{Schrödinger gl: } \underline{i} \hbar \partial_t \Psi(r, t) = \underline{H} \Psi(r, t)$$

( $\rightarrow \varphi_j^* / \int d^3r$ )

$$\underline{I} \quad \underline{i} \hbar \dot{c}_2(t) = \tilde{\varepsilon}_2 c_2(t) - \vec{d}_{21} \cdot \vec{E} c_1(t)$$

$$\underline{II} \quad \underline{i} \hbar \dot{c}_1^*(t) = -\tilde{\varepsilon}_1 c_1^*(t) + \vec{d}_{21} \cdot \vec{E} c_2^*(t)$$

$$\text{allgem: } \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \vec{d}_{ii} \cdot \vec{E}$$

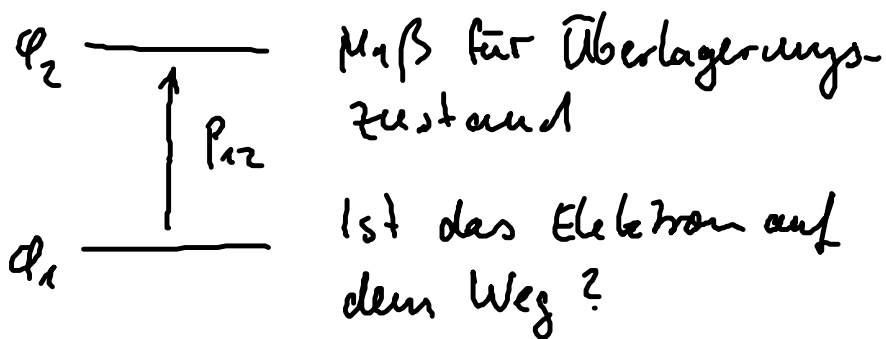
$$\text{Dipolmoment: } \vec{d}_{ij} = q \int d^3r \varphi_i^*(r) \vec{r} \varphi_j(r)$$

→ Gekoppeltes DGL. System für die Amplituden  $c_i$

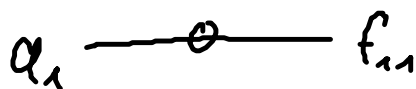
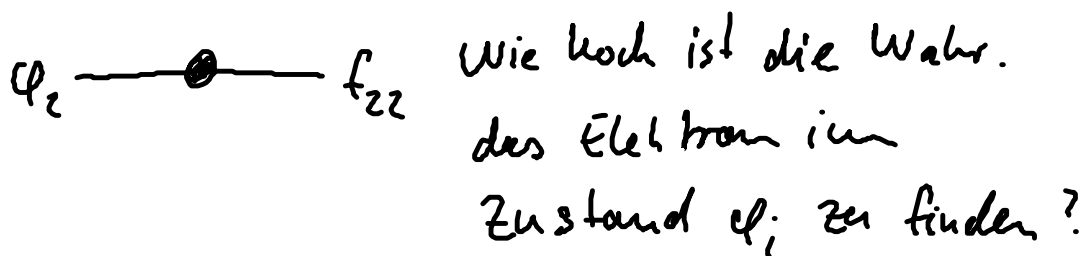
→ wichtig für viele Gebiete:  
Magnetresonanzspektroskopie, Optik,  
Transport

• Interpretation der Koeffizienten:

$$c_1^* c_2 =: P_{12} \hat{=} \text{Übergangswahr. - amplitude}$$



$$c_i^* c_i =: f_{ii} \hat{=} \text{Besetzungswahr. des Zustandes } \varphi_i$$



→ Jetzt Umschreiben von DGL auf  $P_{12}$  und  $f_{22}$   
(durch multipliziert mit  $c_2$  und  $c_1$  und dann addieren)

• Zwei-Niveau Gleichung:

$$\text{I } \dot{P}_{12}(t) = -i\omega_{21}P_{12}(t) + i(\Omega_{21}f_{11} - \Omega_{12}^*f_{22})$$

$$\text{II } \dot{f}_{22}(t) = -i(\Omega_{21}^*P_{12} - \Omega_{12}P_{21})$$

• Vereinfachungen:

(i) Wenn ZNS Wellenfkt.  $\varphi_1, \varphi_2$  reell

$$\Rightarrow d_{21} = d_{12} =: d \quad \text{und}$$

$$\Omega_{21} = \Omega_{12} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{E}(t)}{\hbar} = \Omega(t) \quad \text{Rabi-} \\ \text{frequenz}$$

(ii) Annahme:  $d_{ij} = 0$

(iii) Übergangsfrequenz:  $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$

$$\text{mit } \omega_i = \frac{\epsilon_i}{\hbar}$$

(iv) Anfangsbed.:  $t \rightarrow -\infty$

$$\text{- } e^- \text{ im Grundzustand: } f_{11} = 1 \\ f_{22} = 0$$

$$\text{- keine Dipoldichte: } P_{12} = P_{21} = 0$$

(v) Nur ein  $e^-$  im ZNS, dann gilt

Ladungserhaltung:

$$\frac{d}{dt} (f_{11} + f_{22}) = 0, \quad \text{bzw}$$

$$f_{11} + f_{22} = 1$$

w-Inversion

$$\Rightarrow \text{I} \quad \dot{P}_{12} = -i\omega_{21}P + i\Omega \overbrace{(1 - 2f_{22})}$$

$$\text{II} \quad \dot{f}_{22} = 2\Omega \ln[P_{12}]$$

• Bemerkungen:

(i) Übergang  $P_{12}$

- hat frei Bewegung (Rotation mit  $\omega_{21}$ )

- wird angetrieben durch Term

$$\Omega(t) (1 - 2f_{22})$$

(ii) Inversion  $w = 1 - 2f_{22}$

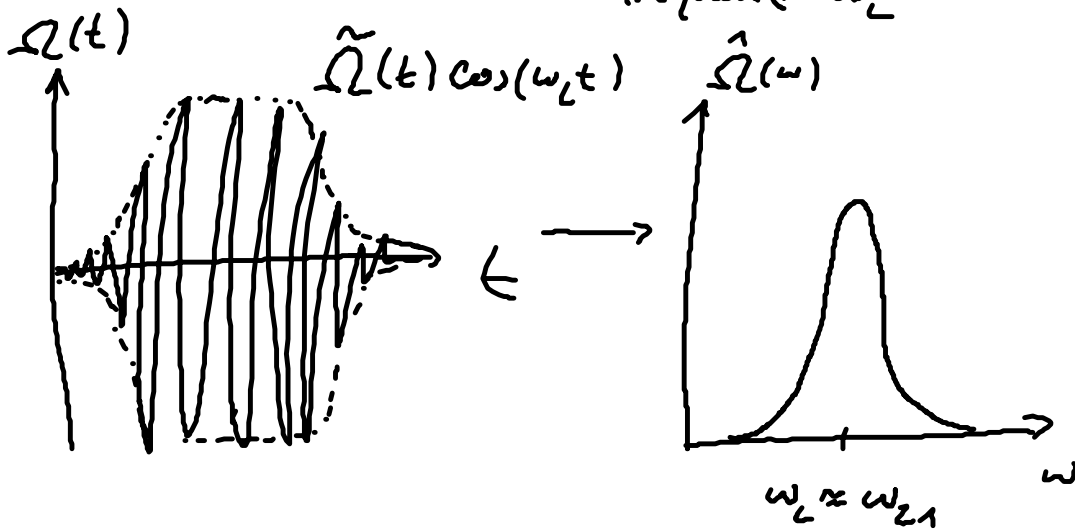
- wenn  $w < 0$ , dann ist die Wahr. höher  
des  $e^-$  im Oberen Zustand  $\varphi_2$  zu finden,  
als im Zustand  $\varphi_1$

- Extremfälle:

—	—●—
—●—	—
$w=1$	$w=-1$

(iii) ZNS-Modell wird angewendet, wenn die  
Freq. der Störung  $\Omega(t)$  „in etwa“ eine  
Freq. hat, die zwischen beide Niveaus

"Paß" :  $E(t) \hat{=} \text{Laserpuls mit Trägerfrequenz } \omega_L$



wobei  $\omega_L \approx \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\hbar} = \omega_{2,1}$

The diagram shows two energy levels,  $\phi_1$  (lower) and  $\phi_2$  (higher). A vertical double-headed arrow between them is labeled  $\omega_L$ , representing the transition frequency.

Aussersten macht ZNS-Approximation keinen Sinn, da zusätzliche/andere Übergänge angeregt werden würden. Eine solche Näherung:  $\omega_L \approx \omega_2 - \omega_1$  heißt auch

Rotating Wave Approximation (RWA)

- Rotating frame: Zerlegen in langsame Einhüllende und schnelle Trägerfrequenz

$$\Omega(t) = \underbrace{\tilde{\Omega}(t)}_{\text{langsam}} \underbrace{\cos(\omega_L t)}_{\text{schnell}}$$

$$P_{12}(t) = \underbrace{\tilde{P}_{12}(t)}_{\text{langsam}} \underbrace{e^{-i\omega_L t}}_{\text{schnell}}$$



Einsetzen in I, II : Dabei treten Terme auf mit:

$$(i) e^{-i\omega_L t} \cdot e^{-i\omega_L t} = e^{-i2\omega_L t}$$

$$(ii) e^{-i\omega_L t} \cdot e^{i\omega_L t} = 1$$

In der RWA vernachlässigt man Terme, die mit doppelter Frequenz schwingen (i), da sie nicht resonant sind mit dem ZNS sind  $2\omega_L \neq \omega_{21}$

$$I \quad \dot{\tilde{P}}_{12}(t) = -i\Delta \tilde{P}_{12} + i \frac{\tilde{\Omega}(t)}{2} \underbrace{(1 - 2f_{22})}_w$$

$$II \quad \dot{f}_{22}(t) = \tilde{\Omega} \operatorname{Im}[\tilde{P}_{12}]$$

Mit dem Detuning  $\Delta = \omega_{21} - \omega_L$  (Energiet./ spektrale Verstimmung zwischen anregender Puls ( $\omega_L$ ) und der ZNS Übergangsfreq.  $\omega_{21}$ )

• Resonante Anregung:  $\Delta = 0$

$$\rightarrow \tilde{P}_{12} \text{ immer imaginär } v := 2 \operatorname{Im} \tilde{P}_{12}$$

$$\dot{v}(t) = \tilde{\Omega}(t) w(t)$$

$$\dot{w}(t) = -\tilde{\Omega}(t) v(t)$$

→ kann analytisch gelöst werden mit Hilfe der Pulsfläche ( $\tilde{\Omega}(t)$ )

$$\Theta(t) := \int_{-\infty}^t d\tau \tilde{\Omega}(\tau) \text{ und } \partial_t \xrightarrow{?} \partial_\Theta$$

$$\begin{aligned} \ln(\hat{P}_{12})(t) &= -\frac{1}{2} \sin(\Theta(t)) && \text{Rabi-} \\ & && \text{Oszillation} \\ f_{22}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\Theta(t)) \end{aligned}$$

• Bemerkungen:

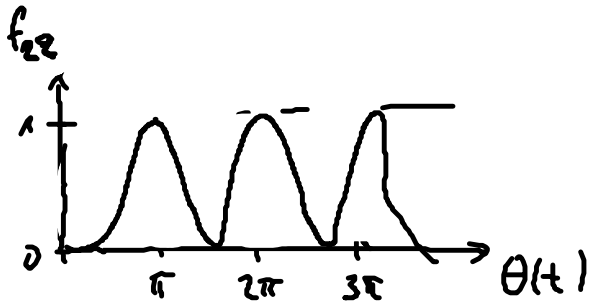
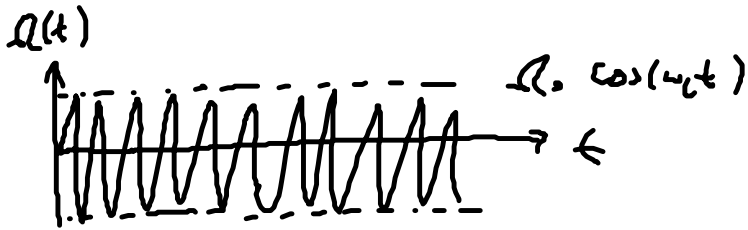
(i) Die Osz. von  $f_{22}(t)$  heißen Rabi-Osz.

(ii) Die Wahr. ein  $e^-$  in  $\varphi_2$  zu finden ändert sich periodisch zwischen 0 und 1.

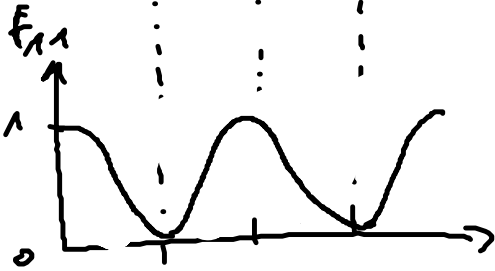
(iii) Grenzfall:  $\tilde{\Omega}(t) = \text{Rechteckpuls} = \Omega_0$

bei  $t_0 = 0$  angeschaltet

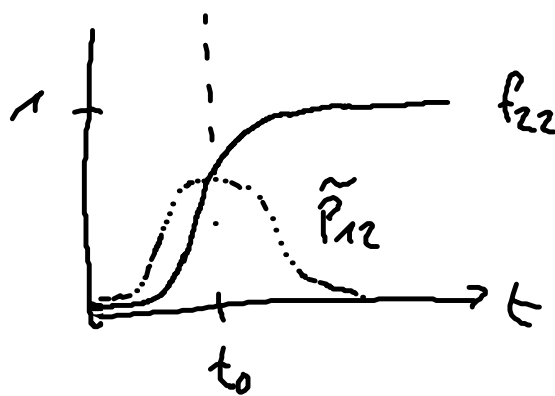
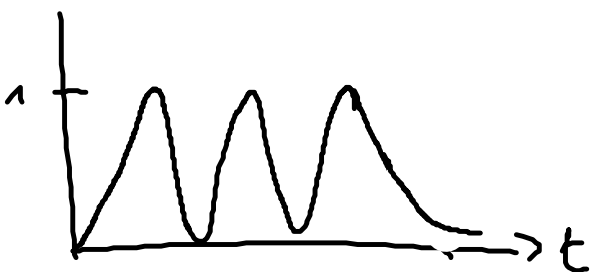
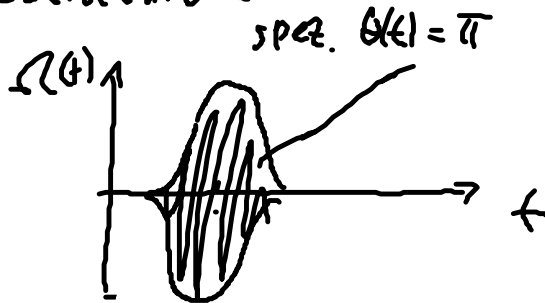
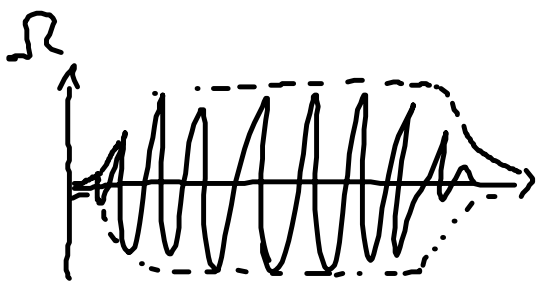
$$\int_0^t d\tau \tilde{\Omega} = \Omega_0 t =: \Theta(t)$$



$$f_{11} + f_{22} = 1$$



(iv) Ein- & Ausschaltvorgänge führen zur Deformation der Oszillation



Bei  $\pi$ -Pulsen

$$P(t \gg t_0) = 0$$

$$f_{22}(t \gg t_0) = 1$$

(v) Der stationäre Wert von  $f_{22}/P_{12}$  hängt nur von Pulsfläche ab, NICHT von der Form des Pulses.

(vi) Das externe Laserfeld „treibt“ das  $e^-$  vom Zustand  $\varphi_1$  nach  $\varphi_2$  bis  $f_{22} = 1$  (induzierte Absorption der Feldenergie), dann erfolgt Rückbewegung von  $2 \rightarrow 1$  (induzierte Emission von Feldenergie)  
→ Entsteht z.B. bei ind. Abs. (Em. von elektromagn. Feldenergie durch Atome.