

4.2 Anwendung des Störereffekt auf H-Atom

- untersten Zustände des Wasserstoff Atoms:

$$n=2 \text{ ————— } (4) \ 2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z$$
$$m=0 \quad \quad \quad -1 \quad +1 \quad 0$$
$$L=0 \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad L=1$$

$$n=1 \text{ ————— } (1) \ 1s$$
$$m=0$$
$$L=0$$

Das W_{ij} führt auf Dipolübergänge / uniaxiale

$$\rightarrow W_{ij} = q \int d^3r \varphi_i^*(r) \vec{r} \varphi_j(r)$$

$$\text{für } i \neq j: W_{ij} \neq 0, \quad W_{ii} = 0$$

Für linear polarisiertes Feld gilt:

$$\Delta m = 0, \quad \Delta l = \pm 1 \quad (\text{ex. kein zirkularer Übergang})$$

$$2s \quad 2p_x \quad 2p_y \quad 2p_z$$

$2s$	0	0	0	W
$2p_x$	0	0	0	0
$2p_y$	0	0	0	0
$2p_z$	W	0	0	0

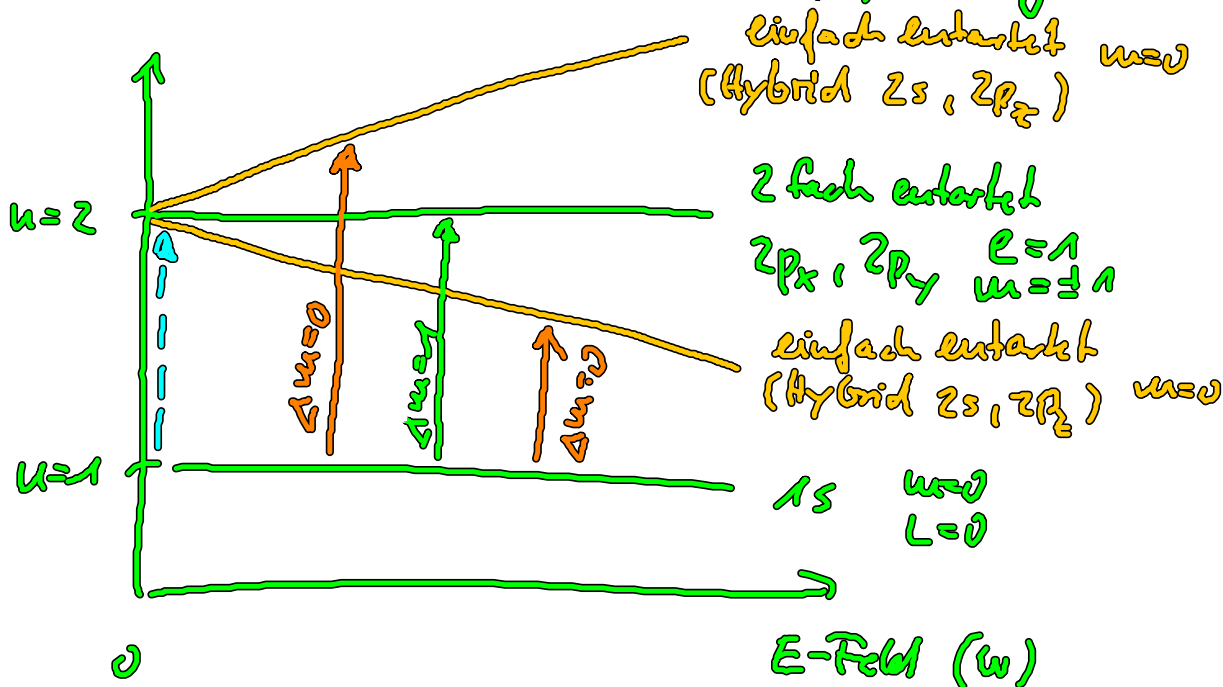
→ Nur $W_{2s, 2p_z}$ ist einzig überlebende
Matrixelement (erfüllt $\Delta l = \pm 1$
 $\Delta m = 0$)

→ eff. ZNS

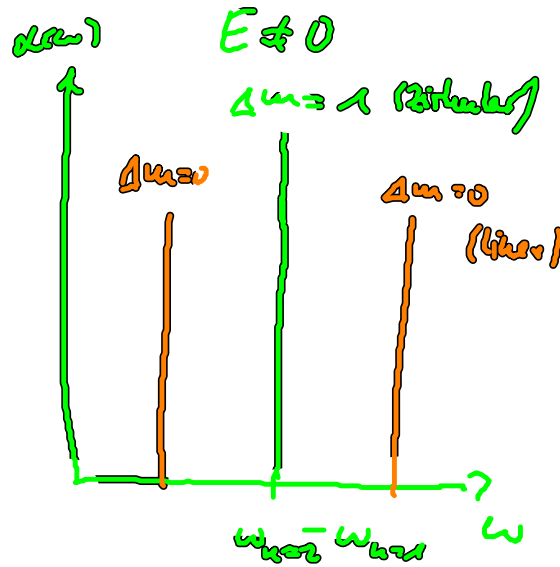
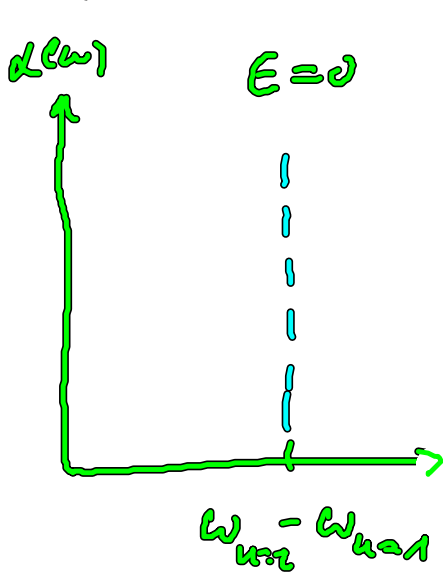
$$\Rightarrow E_{\pm} = E_{n=2} \pm \frac{1}{2} (4 |W_{2s, 2p_z}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= E_{n=2} \pm |W_{2s, 2p_z}|$$

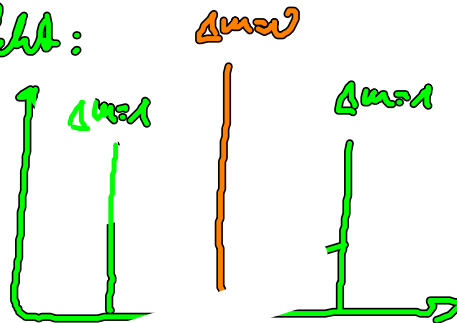
damit erfolgt Energieaufspaltung:



• Spektrum:



→ Vgl. Zeeman-Effekt:



• physikalische Erklärung:

Statt Kugel-, gilt jetzt Zylindersymmetrie
(wir zeichnen mit E-Feld eine Richtung aus)

→ aus 3-facher Entartung wird 2fache

• Besonderheit **NUR** im H-Atom:

- es besteht nur L-Entartung

- es tritt ein linearer Stark-Effekt auf

→ sonst quadrat. Stark-Effekt, weil

keine (diagonalen) Dipolmomente zur
selben Energie

5. Optischer Stark Effekt: (Ultraschnelloptik)

zeitabh. Anregung eines ZNS mit el. Feldern

Bei zeitabh. WW ($\underline{W} = \underline{W}(t)$) starten wir
mit Koeffizientgl. für die $c_i(t)$

$$\text{aus } \Psi(r, t) = \sum_i c_i(t) \varphi_i(r)$$

• Hamiltonian:
$$\underline{H} = \underline{H}_{\text{Atom}} + \underline{W}(t)$$
$$= \underline{H}_{\text{Atom}} - \vec{d} \cdot \vec{E}(t)$$

mit $\underline{H}_{\text{Atom}} \varphi_i = \varepsilon_i \varphi_i$, $\vec{d} = q \vec{r}$

• Schrödinger gl.: $i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(r, t) = \underline{H} \Psi(r, t)$
($\rightarrow \varphi_i^*$ / Satz)

$$\underline{I} \quad i\hbar \dot{c}_2(t) = \tilde{\varepsilon}_2 c_2(t) - \vec{d}_{21} \cdot \vec{E} c_1(t)$$

$$\underline{II} \quad i\hbar \dot{c}_1^*(t) = -\tilde{\varepsilon}_1 c_1^*(t) + \vec{d}_{21} \cdot \vec{E} c_2^*(t)$$

allgem.: $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \vec{d}_{ii} \cdot \vec{E}$

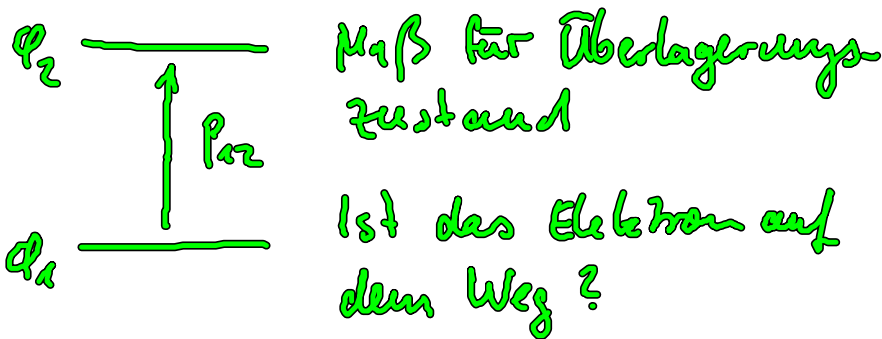
Dipolmoment: $\vec{d}_{ij} = q \int d^3r \varphi_i^*(r) \vec{r} \varphi_j(r)$

→ Gekoppeltes DGL. system für die Amplituden c_i

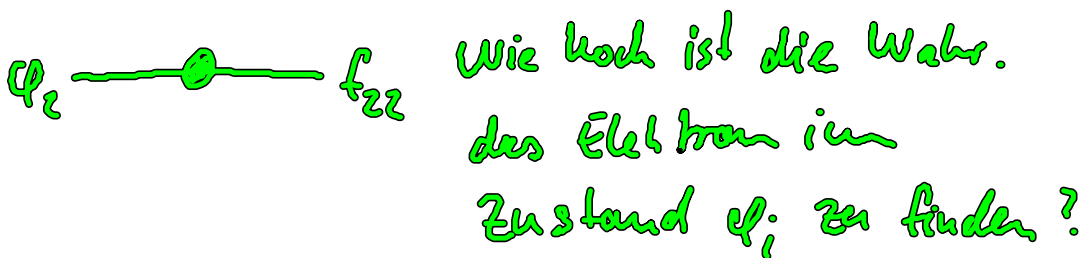
→ wichtig für viele Gebiete:
Magnetresonanzspektroskopie, Optik,
Transport

• Interpretation der Koeffizienten:

$$c_1^* c_2 =: P_{12} \hat{=} \text{Übergangswahr. - amplitude}$$



$$c_i^* c_i =: f_{ii} \hat{=} \text{Besetzungswahr. des Zustandes } \varphi_i$$



→ Jetzt Umschreiben von DGL auf P_{12} und f_{12}

(durch multipliziert mit c_2 und c_1 und dann addieren)

• Zwei-Niveaue Gleichung:

$$\text{I } \dot{P}_{12}(t) = -i\omega_{21}P_{12}(t) + i(\Omega_{21}f_{11} - \Omega_{12}^*f_{22})$$

$$\text{II } \dot{f}_{22}(t) = -i(\Omega_{21}^*P_{12} - \Omega_{12}P_{21})$$

• Vereinfachungen:

(i) Wenn ZNS Wellenfkt. φ_1, φ_2 reell

$$\Rightarrow d_{21} = d_{12} =: d \text{ und}$$

$$\Omega_{21} = \Omega_{12} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{E}(t)}{\hbar} = \Omega(t) \quad \text{Rabi-Frequenz}$$

(ii) Annahme: $d_{ij} = 0$

(iii) Übergangsfrequenz: $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$

$$\text{mit } \omega_i = \frac{\epsilon_i}{\hbar}$$

(iv) Anfangsbed.: $t \rightarrow -\infty$

$$\text{- } e^- \text{ im Grundzustand: } f_{11} = 1, f_{22} = 0$$

$$\text{- keine Dipoldichte: } P_{12} = P_{21} = 0$$

(v) Nur ein e^- im ZNS, dann gilt

Ladungserhaltung:

$$\frac{d}{dt} (f_{11} + f_{22}) = 0, \text{ bzw}$$

$$f_{z1} + f_{z2} = 1$$

w-Inversion

$$\Rightarrow \text{I } \dot{P}_{12} = -i\omega_{z1}P + i\Omega(1 - 2f_{z2})$$

$$\text{II } \dot{f}_{z2} = 2\Omega \ln[P_{12}]$$

• Bemerkungen:

(i) Übergang P_{12}

- hat frei Bewegung / Rotation mit ω_{z1}

- wird angetrieben durch Term

$$\Omega(t)(1 - 2f_{z2})$$

(ii) Inversion $w = 1 - 2f_{z2}$

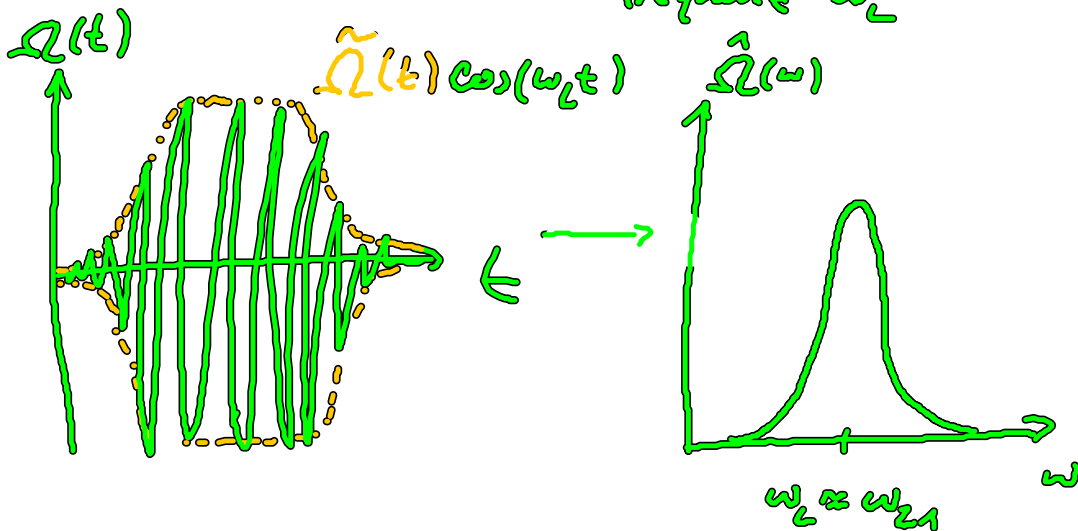
- wenn $w < 0$, dann ist die Wahr. höher
des e^- im Oberen Zustand φ_2 zu finden,
als im Zustand φ_1

- Extremfälle:

—	—●
—●	—
$w=1$	$w=-1$

(iii) ZNS-Modell wird angewendet, wenn die
Freq. der Störung $\Omega(t)$ „in etwa“ eine
Freq. hat, die zwischen beide Niveaus

„Pabst“: $E(t) \hat{=} \text{Laserpuls mit Träger-}$
 frequenz ω_L



wobei $\omega_L \approx \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\tau} = \omega_{21}$

The diagram shows two horizontal lines representing energy levels, labeled ϵ_1 (bottom) and ϵ_2 (top). A vertical double-headed arrow between them is labeled ω_L , representing the transition frequency.

Aussersten macht ZNS-Approximation keinen Sinn, da zusätzliche / andere Übergänge angeregt werden würden. Eine solche Näherung: $\omega_L \approx \omega_2 - \omega_1$ heist auch

Rotating Wave Approximation (RWA)

- Rotating frame: Zerlegen in langsame Einhüllende und schnelle Trägerfrequenz

$$\Omega(t) = \underbrace{\tilde{\Omega}(t)}_{\text{langsam}} \underbrace{\cos(\omega_L t)}_{\text{schnell}}$$

$$P_{12}(t) = \underbrace{\tilde{P}_{12}(t)}_{\text{langsam}} \underbrace{e^{-i\omega_L t}}_{\text{schnell}}$$

Einsetzen in I, II : Dabei treten Terme auf mit:

$$(i) e^{-i\omega_L t} \cdot e^{-i\omega_L t} = e^{-i2\omega_L t}$$

$$(ii) e^{-i\omega_L t} \cdot e^{i\omega_L t} = 1$$

In der RWA vernachlässigt man Terme, die mit doppelter Frequenz schwingen (i), da sie nicht resonant sind mit dem ZNS sind $2\omega_L \neq \omega_{z1}$

$$I \quad \dot{\tilde{p}}_{12}(t) = -i\Delta \tilde{p}_{12} + i \frac{\tilde{\Omega}(t)}{2} \underbrace{(1 - 2f_{z2})}_w$$

$$II \quad \dot{f}_{z2}(t) = \tilde{\Omega} \ln[\tilde{p}_{12}]$$

Mit dem Detuning $\Delta = \omega_{z1} - \omega_L$ (Energ. / Spektrale Verstimmung zwischen anregendem Puls (ω_L) und der ZNS Übergangsfreq. ω_{z1})

• Resonante Anregung: $\Delta = 0$

$$\rightarrow \tilde{p}_{12} \text{ immer imaginär } v := 2 \ln \tilde{p}_{12}$$

$$\dot{v}(t) = \tilde{\Omega}(t) w(t)$$

$$\dot{w}(t) = -\tilde{\Omega}(t) v(t)$$

→ kann analytisch gelöst werden mit Hilfe der Pulsfläche ($\tilde{\Omega}(t)$)

$$\Theta(t) := \int_{-\infty}^t d\tau \tilde{\Omega}(\tau) \text{ und } \frac{d}{dt} \xrightarrow{?} \frac{d}{d\Theta}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \text{Im}(\hat{p}_z)(t) &= -\frac{1}{2} \sin(\Theta(t)) && \text{Rabi-Oszillation} \\ f_{zz}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\Theta(t)) \end{aligned}$$

• Bemerkungen:

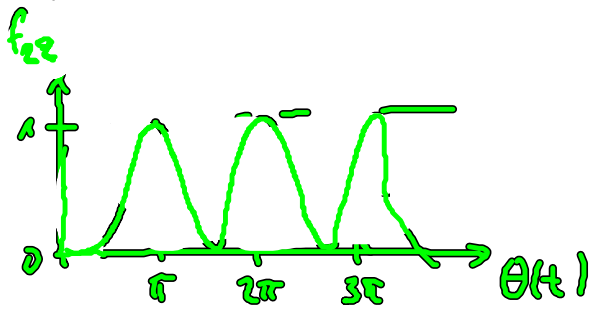
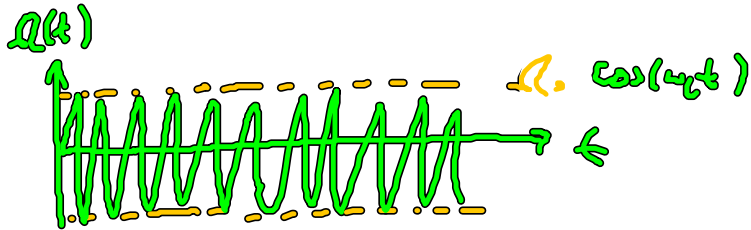
(i) Die Osz. von $f_{zz}(t)$ heißen Rabi-Osz.

(ii) Die Wahr. ein e^- in φ_z zu finden ändert sich periodisch zwischen 0 und 1.

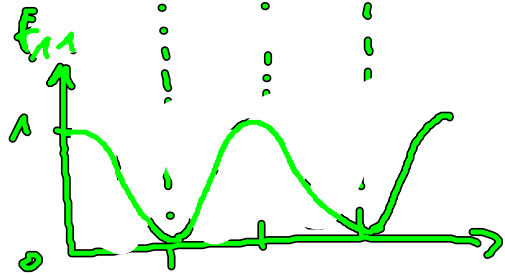
(iii) Grenzfall: $\tilde{\Omega}(t) = \text{Rechteckpuls} = \Omega_0$

bei $t_0 = 0$ angeschaltet

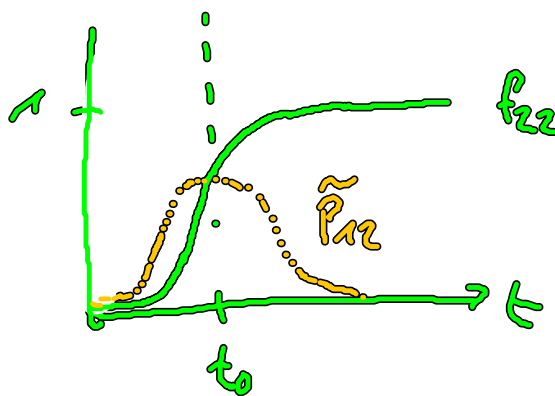
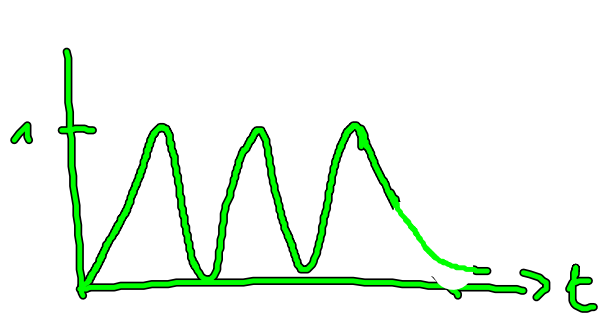
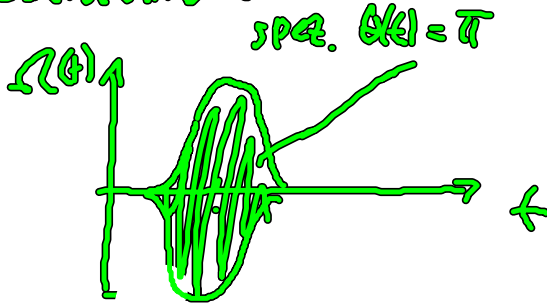
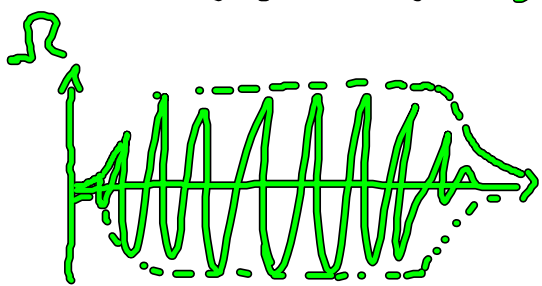
$$\int_0^t d\tau \tilde{\Omega} = \Omega_0 t =: \Theta(t)$$



$$f_{11} + f_{22} = 1$$



(iv) Ein- Q Ausschaltvorgänge führen zur Deformation der Oszillation



Bei π -Pulsen

$$P(t \gg t_0) = 0$$

$$f_{22}(t \gg t_0) = 1$$

(v) Der stationäre Wert von f_{22}/P_{22} hängt nur von Pulsfläche ab, NICHT von der Form des Pulses.

(vi) Das externe Laserfeld „treibt“ das e^- vom Zustand φ_1 nach φ_2 bis $f_{22} = 1$ (induzierte Absorption der Feldenergie), dann erfolgt Rückbewegung von $2 \rightarrow 1$ (induzierte Emission von Feldenergie)
→ Entsteht z.B. bei ind. Abs. / Em. von elektromagn. Feldenergie durch Atome.