Theoretische Physik VI: Vertiefung „Nichtlineare Dynamik und Kontrolle"

VL SS2014 (3233L120): P. Hövel, K. Lüdge
www.tu-berlin.de?nonlin_dyn_SS14
Masterstudiengang Physik: Pflichtvorlesung TP V / VI (grundlagenorientiert)
11 + 10 ECTS
TP V oder TP VI (anwendungsorientiert)

VL: Di + Do: 8:30 – 10:00 EW 203
UE: Mi : 12:15 – 13:45 EW 731 (V. Belik)
} 10 ECTS (Übungsblätter & Projekt)

⇒ Mosesanmeldung! bis 16.4.14 (18:00)

Ergänzendes Seminar (z.B. für ein Wahlpflichtmodul, 12 ECTS):
z.B.: "The role of symmetries in dynamical networks"
(3233L606, Direktzugang: 137661, Di: 16:00 – 17:00 EW 731)

Inhalt der Vorlesung

1. Dynamische Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlinearen Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren
4. Gekoppelte Systeme & Netzwerke
5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
6. Anwendung auf Laser
7. Anwendung auf Neuro

Literatur: siehe Internetseite und Semesterapparat (BB Physik)

1. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

Nichtlineare Dynamik und Fragestellung:

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollparameter)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeit von Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss, d.h. die Gesamtheit der Trajektorien / Bahnkurven
- geordnete oder ungeordnete (chaotische) Lösungen

1.1 Vektorfelder als dynamische Systeme

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlinearen) Differenzialgleichungen 1. Ordnung formulieren:

$$\boxed{\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(\underline{x}(t), t)}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dynamische Variablen

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

<u>deterministisches dynamisches System</u>: z.B. Newton'sche Bewegungsgleichungen mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y,t)\,\dot{y}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{f_2(y,t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= \dot{y} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f_1 x_2 - f_2 \end{aligned}$$

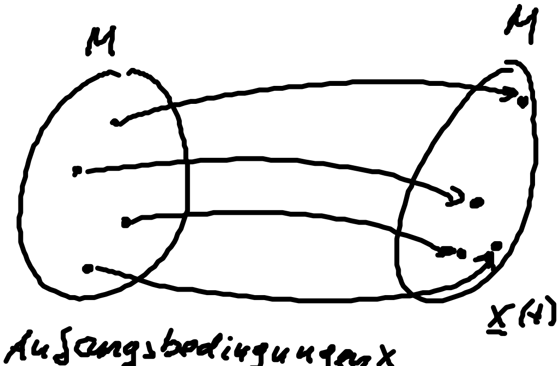
Speziell Hamilton'sche Systeme: $\left.\begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array}\right\}$ $\dot{q} = \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p}$

$H(q,p)$: Hamilton-Funktion $\dot{p} = \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q}$

<u>Fluss des Vektorfeldes $\underline{F}$</u> auf der Mannigfaltigkeit (Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^4$)

$\phi : M \times \mathbb{R}_t \longrightarrow M$ mit $\phi(\underset{\uparrow}{\underline{x}_0}, t) = \phi_t(x_0) = \underline{x}(t; x_0)$

Anfangsbedingung



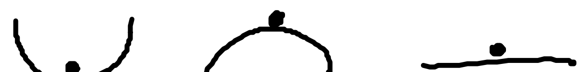
Gesamtheit der Bahnkurven = Trajektorien

<u>Fixpunkt $\underline{x}^*$ des autonomen dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$:</u>

(stationäre Punkte, Gleichgewichtspunkte, singuläre Punkte, kritische Punkte)

$0 \overset{!}{=} \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) = \dot{\underline{x}}^* \Rightarrow$ Bestimmung von $\underline{x}^*$

Stabilität eines Fixpunktes:



Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen: $\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$

$$\boxed{\delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\underline{x}^*} \delta x_k} \iff \boxed{\delta\dot{\underline{x}} = (D\underline{\underline{F}})_{\underline{x}^*}\, \delta\underline{x}}$$

mit Jacobi-Matrix $D\underline{\underline{F}}$

$$\delta\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{x}}^* = \underline{F}(\underline{x}) - \underbrace{\underline{F}(\underline{x}^*)}_{\hat{=}\,0} \underset{\uparrow}{\approx} (D\underline{\underline{F}})_{\underline{x}^*}(\underline{x} - \underline{x}^*) = (D\underline{\underline{F}})_{\underline{x}^*}\, \delta\underline{x}$$

Taylor-Entwicklung

$\Rightarrow$ System von linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Lösungsansatz: $\delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda\underline{\xi} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\xi}$ Eigenwertgleichung

$\left.\begin{array}{l} \lambda_k: \text{Eigenwerte} \\ \underline{\xi}^{(k)}: \text{Eigenvektor} \end{array}\right\}$ der Jacobi-Matrix $(D\underline{\underline{F}})_{\underline{x}^*} \equiv \underline{\underline{A}}$

allgemeine Lösung: $\delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \underline{\xi}_k\, e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k: $\lambda_k \neq \lambda_j$ für $k \neq j$
c_k durch Anfangsbedingungen bestimmt)

Beispiele: (i) Ebenes Pendel $\quad m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin\varphi = 0$

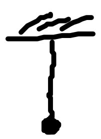
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi \\ x_2 &= p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 &= -m g l \sin x_1 \end{aligned}$$

Fixpunkte: $\underline{F}(\underline{x}^*) \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_2$

$$\Rightarrow x_2 = 0\,, \quad x_1 = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

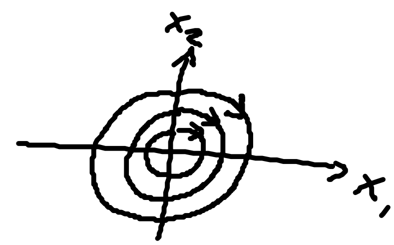
Linearisierung: $$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\underline{x}^*}}_{= \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) $x_1 = x_2 = 0$



$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwerte von } \underline{\underline{A}}: \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} \overset{!}{=} 0$$

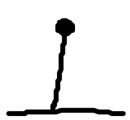


Zentrum

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$$ ungedämpfte Schwingung

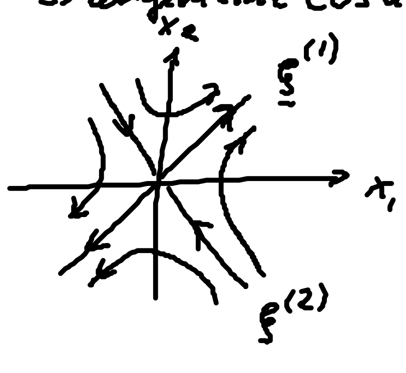
b) $x_1 = \pi\,, \quad x_2 = 0$



$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ m g l & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte: } \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lösung: } \delta\underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} \underbrace{e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\, t}}_{} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\, t}$$



für $t \to \infty$
instabil längs Richtung von $\underline{\xi}^{(1)}$

NB: Da die Matrix $\underline{\underline{A}}$ nicht symmetrisch ist, sind

Sattelpunkt

die Eigenvektoren i.a. nicht senkrecht zueinander.