

Theoretische Physik VI: Vertiefung, Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

VL SS 2014 (3233L120): P. Hövel, K. Lädge

www.tu-baun.de/zuonline_dyn-ss14

Masterstudienangang Physik: Pflichtvorlesung TP V / VI (grundlagenorientiert)

11 + 10 ECTS

TP V oder TP VI (anwendungsorientiert)

VL: Di + Do: 8:30 - 10:00 EW 203

UE: Mi: 12:15 - 13:45 EW 731 (V. Bakk) } 10 ECTS
(Übungsblätter & Projekt)

=> **Moserausschreibung!** bis 16.4.14 (18:00)

Ergänzendes Seminar (z.B. für ein Wahl/Pflichtmodul, 12 ECTS):

z.B.: "The role of symmetries in dynamical networks"

(3233L606, Direktzugang: 137661, Di: 16:00 - 17:00 EW 731)

Inhalt der Vorlesung

1. Dynamische Systeme
2. Kontrollkonzepte der nicht linearen Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren
4. Gekoppelte Systeme & Netzwerke
5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Resonanzen
6. Anwendung auf Laser
7. Anwendung auf Neuro

Literatur: siehe Internetseite und Semesterapparat (BB Physik)

1. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

Nichtlineare Dynamik und Fragestellung:

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollparameter)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeit von Ungeauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss, d.h. die Gesamtheit der Trajektorien / Bahnkurven
- geordnete oder ungeordnete (chaotische) Lösungen

1.1 Vektorfelder als dynamische Systeme

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlinearen)

Differenzialgleichungen 1. Ordnung formulieren:

$$\boxed{\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(\underline{x}(t), t)}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dynamische Variablen
 $\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

deterministisches dynamisches System: z.B. Newton'sche Bewegungsgleichungen mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y, t)}_{\text{Reibung}} \dot{y} + \underbrace{f_2(y, t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 \end{array}$$

Speziell Hamilton'sche Systeme: $x_1 = q$
 $x_2 = p$ } $\dot{p} = \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q}$
 $\dot{q} = \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p}$

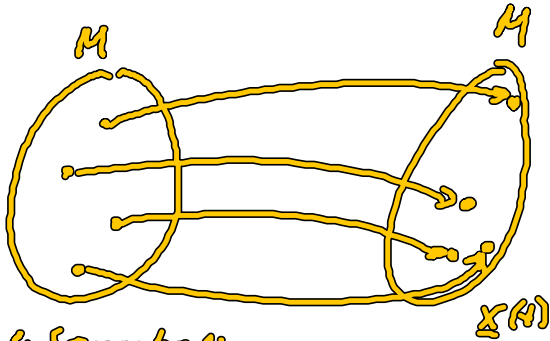
$H(q, p)$: Hamilton-Funktion

Fluss des Vektorfeldes \underline{F} auf der Mannigfaltigkeit (Phasenraum, z.B. \mathbb{R}^n)

$\phi: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M$ mit $\phi(x_0, t) = \phi_t(x_0) = \underline{x}(t; x_0)$

↑
Anfangsbedingung

Gesamtheit der Bahnkurven = Trajektorien



Anfangsbedingungen x_0

Fixpunkt \underline{x}^* des autonomen dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$:

(stationäre Punkte, Gleichgewichtspunkte, singuläre Punkte, kritische Punkte)

$0 \stackrel{!}{=} \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) = \underline{x}^* \Rightarrow$ Bestimmung von \underline{x}^*

Stabilität eines Fixpunktes:

Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen: $\delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

\Leftrightarrow

$$\delta \dot{\underline{x}} = (D\underline{F})_{\underline{x}^*} \delta \underline{x}$$

mit Jacobi-Matrix $D\underline{F}$

$$\delta \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{x}}^* = \underline{F}(\underline{x}) - \underline{F}(\underline{x}^*) \approx \underbrace{\underline{0}}_{\leq 0} + \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{x}^*}}_{\uparrow \text{ Taylor-Entwicklung}} (\underline{x} - \underline{x}^*) = (D\underline{F})_{\underline{x}^*} \delta \underline{x}$$

\Rightarrow System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Lösungsansatz: $\delta \underline{x}(t) = \underline{\xi} e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = \underline{A} \underline{\xi}$ Eigenwertgleichung

λ_k : Eigenwerte
 $\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektor } der Jacobi-Matrix $(D\underline{F})_{\underline{x}^*} = \underline{A}$

allgemeine Lösung: $\delta \underline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine externen Einwirkungen $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$ für $k \neq j$
 C_k durch Anfangsbedingungen bestimmt)

Beispiele: (i) Ebene Pendel $m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin \varphi = 0$



$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi \\ x_2 &= \dot{\varphi} = \frac{1}{m l^2} \int \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 &= -m g l \sin x_1 \end{aligned}$$

Fixpunkte: $F(\underline{x}^*) = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_2$

$\Rightarrow x_2 = 0, x_1 = n\pi \quad (n=0,1,\dots)$

Linearisierung: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a) $x_1 = x_2 = 0$



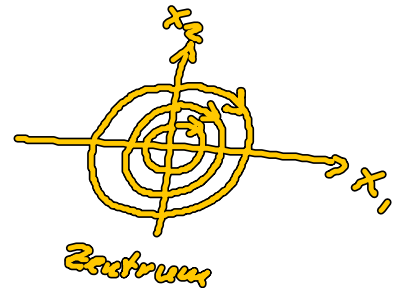
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Eigenwerte von A : $\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} \stackrel{!}{=} 0$

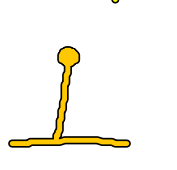
$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i \omega$

$\Rightarrow \underline{x}(t) = c_1 \underline{f}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{f}^{(2)} e^{-i\omega t}$

ungekoppelte Schwingung



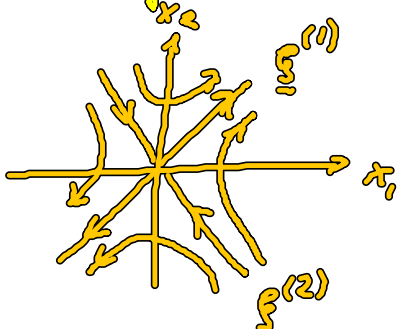
b) $x_1 = \pi, x_2 = 0$



$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ m g l & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$

\Rightarrow Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$

\Rightarrow allgemeine Lösung: $\delta \underline{x}(t) = c_1 \underline{f}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + c_2 \underline{f}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}$



für $t \rightarrow \infty$
 instabile Lösung, Richtung von $\underline{f}^{(1)}$

NB: Da die Matrizen A nicht symmetrisch sind

Sattelpunkt

die Eigenvektoren i. d. Wirkb senkrecht zueinander.