English summary:

1. Dynamical systems & deterministic chaos

1.1 Vector fields as dynamical systems

Dynamical system: set of differential equations of 1st order: $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$: dynamical variable

$\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$: vector field

Flow of vector fields: $\phi: \underset{\text{manifold}}{M} \times \mathbb{R}_t \to M$ such that $\phi(\underset{\text{initial state}}{\underline{x}_0}, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$

$\Rightarrow$ set of trajectories

fixed point $\underline{x}^*$ of $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$ (autonomous system): $0 \overset{!}{=} \underline{F}(\underline{x}^*)$

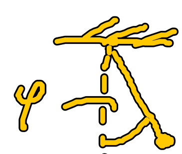
types of fixed points: stable, unstable, neutrally stable

linear stability analysis: consider small deviation $\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$:

$$\Rightarrow \delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)\bigg|_{\underline{x}^*} \delta x_k \iff \delta\dot{\underline{x}} = \underbrace{(\underline{\underline{DF}})\big|_{\underline{x}^*}}_{\text{Jacobian}} \delta\underline{x}$$

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung:

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{2\gamma\dot{\varphi}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\omega^2}_{= \frac{g}{l}} \sin\varphi = 0$$



$x_1 = \varphi$

$x_2 = ml^2\dot{\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 &= -mgl\sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{aligned}\right\} \text{Fixpunkte unverändert im Vergleich zu (i)}$$

Linearisierung: $$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl\cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix}\Bigg|_{\underline{x}^*} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$(ml^2\ddot{\varphi} + kl^2\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0)$$

$\Rightarrow 2\gamma = \frac{k}{m}$

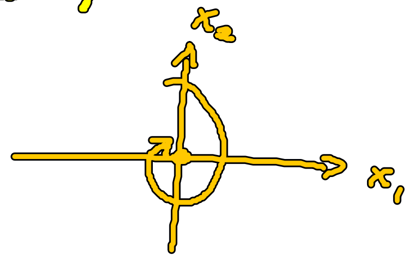
a) $x_1 = x_2 = 0 = x_i^*$: $\underline{\underline{A}}\big|_{\underline{x}^*} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix}$

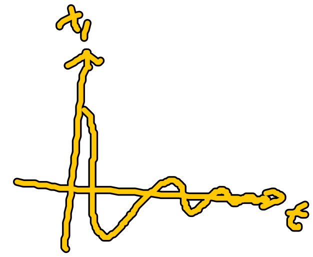
$\Rightarrow$ Eigenwertgl.: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$

$\gamma^2 < \omega^2$: schwache Reibung

(a₁) gedämpfte Schwingung: $\gamma^2 < \omega^2$

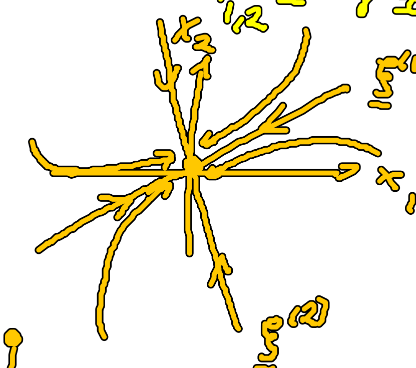




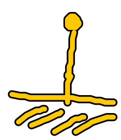
(a₂) aperiodische gedämpfte Bewegung (überdämpfter Oszillator)

starke Reibung $\gamma^2 > \omega^2$: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}_{<\gamma} < 0$

stabiler Knoten



b) $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$

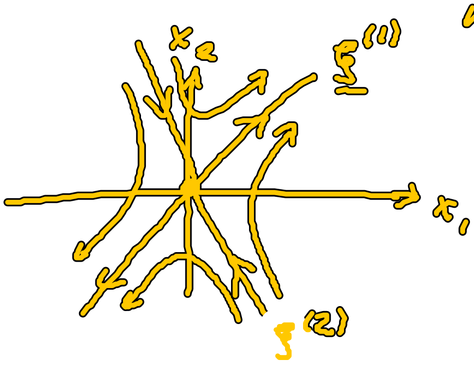


Eigenwerte: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}_{>\gamma}$

vgl. a)

$\Rightarrow \lambda_1 > 0$

$\lambda_2 < 0$



instabiler Fixpunkt (Sattelpunkt)

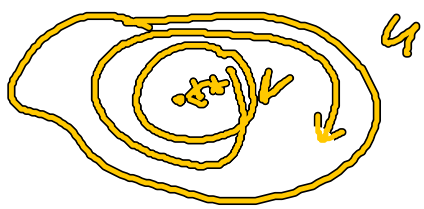
1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

allgemeine Definition der Stabilität:

Sei $\underline{x}^*$ Fixpunkt des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$

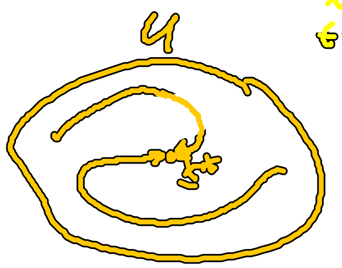
Def.: $\underline{x}^*$ heißt **stabil** (oder Ljapunov stabil), wenn zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V von $\underline{x}^*$ existiert, so dass gilt:

$$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \qquad \forall t \geq 0$$



Def.: $\underline{x}^*$ heißt **asymptotisch stabil**, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U existiert, so dass $\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$ für $0 < t_1 < t_2$ und

$$\lim_{t \to \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \qquad \forall \underline{x} \in U$$



U schrumpft mit wachsendem t auf $\underline{x}^*$ zusammen, d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen

Def.: Ein dynamisches System heißt **dissipativ**, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen.

Kriterium für (Ljapunov-)Stabilität (lokal):

Wenn $\underline{x}^*$ stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(D\underline{F})_{\underline{x}^*}$ einen positiven Realteil. Bsp.: Fixpunkt a) siehe oben (mit/ohne Reibung)

Hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität:

Alle Eigenwerte haben negative Realteile.

Bsp.: Fixpunkt a) des Pendels mit Reibung.

Beispiele für Instabilität: Fixpunkt b)

Allgemeines System mit $n = 2$:

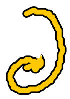
$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21}$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda \underbrace{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}}}_{\text{Spur } a_{11}+a_{22}} + \det \underline{\underline{A}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} \pm \sqrt{(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}})^2 - 4 \det \underline{\underline{A}}}\right), \quad \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\,\underline{F}$$

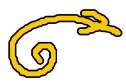
Fallunterscheidung:

(a) **stabiler Fokus**: $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} < 0$, $(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}})^2 < 4 \det \underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$, $\lambda_0, \omega > 0$



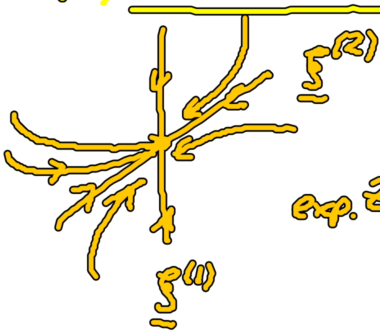
gedämpfte Oszillationen im Phasenraum

(b) **instabiler Fokus**: $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} > 0$, $(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}})^2 < 4 \det \underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow \lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega$



entdämpfte Oszillationen

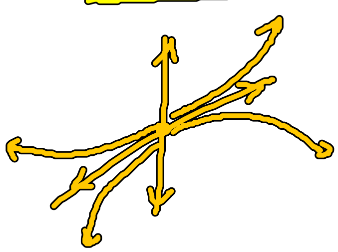
(c) **stabiler Knoten**: $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} < 0$, $(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}})^2 > 4 \det \underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow \lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$



exp. Zerfall

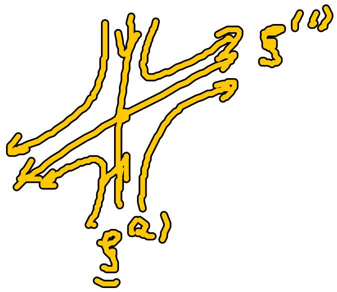
fast alle Trajektorien nähern sich dem Fixpunkt entlang des Eigenvektors, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört.

(d) **instabiler Knoten**: $\det \underline{\underline{A}} > 0$, $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} > 0$, $(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}})^2 > 4 \det \underline{\underline{A}}$ $\Rightarrow \lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

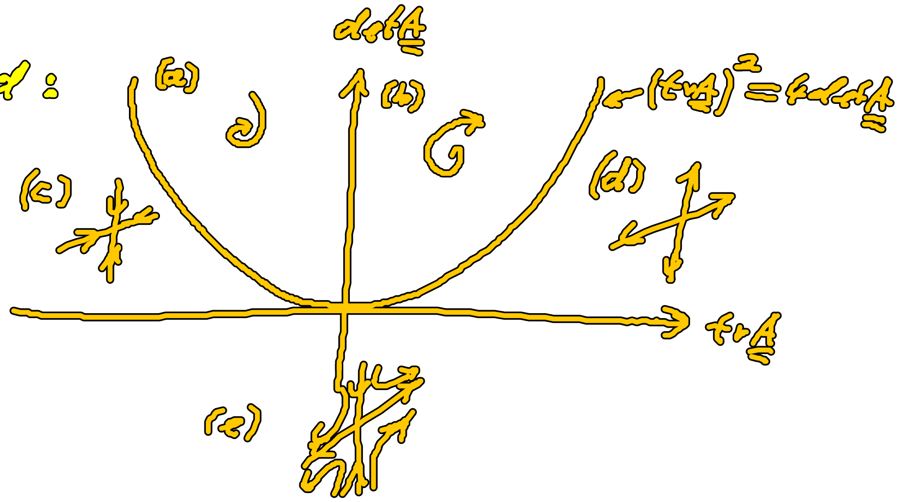


exp. Entdämpfung

(e) <u>Sattelpunkt:</u> $\det \underline{\underline{A}} < 0$ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$



Zusammenfassend:



<u>Grenze zwischen den 5 Bereichen:</u> entartete Fälle

- lineare Stabilitätsanalyse versagt, höhere Terme der Taylor-Entwicklung von $\underline{F}(\underline{x})$ um den Fixpunkt nötig

  $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = 0$, $\det \underline{\underline{A}} > 0$: entweder Zentrum 

  oder <u>schwach</u> stabiler/instabiler Fokus

- qualitative Änderungen im Verhalten des Flusses möglich in Abhängigkeit der Systemparameter (<u>Bifurkation</u> = Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit)

speziell Hamilton'sche Vektorfelder: $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \mathrm{div}\,\underline{F} = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0 \Rightarrow$$ keine asymptotische Stabilität möglich!