

English summary:

1.2 Stability and long-term behavior

• \underline{x}^* is called (Lyapunov) stable, if for every neighborhood U of \underline{x}^* there is a neighborhood V of \underline{x}^* such that: $\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$
 \Rightarrow no eigenvalue of $(D\underline{F})_{\underline{x}^*}$ with positive real part

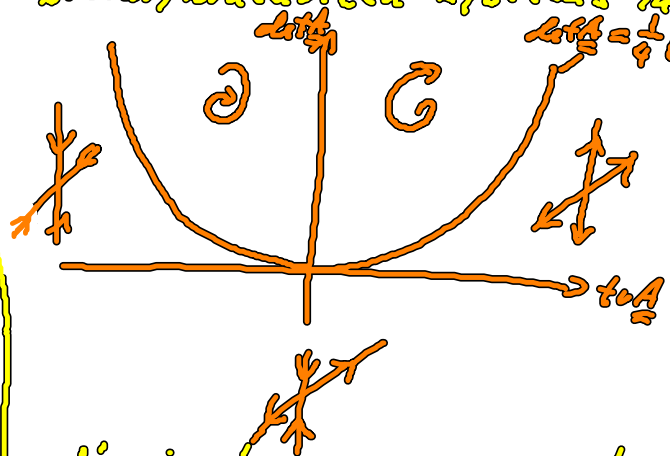


• \underline{x}^* is called asymptotically stable, if there is a neighborhood U of \underline{x}^* such that:
 $\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$ for $0 < t_1 < t_2$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$
 \Rightarrow all eigenvalues of $(D\underline{F})_{\underline{x}^*}$ have negative real part



• linear/linearized systems in $n=2$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



boundary of qualitatively different dynamical regions \Rightarrow bifurcations

• dissipative systems: phase space is contracting

Fortsatzung Kapitel 1.2

Hausdorffsche Vektorfelder: $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \\ \dot{p}_1 \\ \vdots \\ \dot{p}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial H}{\partial q_f} \end{pmatrix}$$

, $f = \#$ Freiheitsgrade

Linearisierung: $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}^*} x_k$$

$$\Rightarrow \text{tr} \underline{A} = \text{div} \underline{F} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

Aus $0 = \text{tr} \underline{A} = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt, dass keine asymptotische Stabilität möglich ist. (sondern nur Lyapunov-Stabilität).

Beweis: sonst müsste alle $\text{Re} \lambda_j > 0$ sein

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \Leftrightarrow \operatorname{tr} \underline{A} < 0$$

\Rightarrow möglich nur $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, $\lambda_i = \pm i\omega$ (Zerfassen)

Falls $f=1$ ($n=2$): Fixpunkte nur Zentren ($\operatorname{det} \underline{A} > 0$)

oder Sattelpunkte ($\operatorname{det} \underline{A} < 0$) sein.

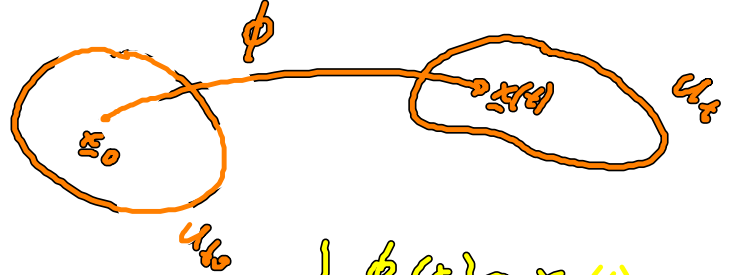
Aus $\operatorname{tr} \underline{A} < 0$ bzw. $\sum \lambda_i < 0$ folgt der Liouville'sche Satz der klassischen statistischen Physik.

$$V_t = \int_{U_t} d^2x$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^2x_0 \det D\phi_t(x_0)$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^2x_0 \left[1 + (t-t_0) \underbrace{\sum_{i=1}^2 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}}_{(\operatorname{div} \underline{F})_{x_0}} + \dots \right]$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int_{U_{t_0}} d^2x_0 (\operatorname{div} \underline{F})_{x_0} + O((t-t_0)^2)$$



$$\phi_t(x_0) = \underline{x}(t)$$

$$D\phi_t(x_0) = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^j} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} + (t-t_0) \frac{\partial}{\partial x_0^j} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \dots & & \\ & 1 + \dots & \\ & & \dots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dV_t}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} = \int_{U_{t_0}} d^2x_0 (\operatorname{div} \underline{F})_{x_0} = 0$$

$= 0$ (Hamiltonsche Systeme!)

Phasenraumvolumina bleiben erhalten, d.h. Fluss inkompressibel!

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina, die einem asymptotisch stabilen Fixpunkt umschließen:

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^2x (\operatorname{div} \underline{F})_{x^*} - \lambda \cdot V_t \Rightarrow V(t) = e^{-\lambda t} V_t$$

mit Phasenraumkontraktionsrate $\lambda := \operatorname{div} \underline{F} = \operatorname{tr} \underline{A}$.

Inbesondere $\operatorname{Re}(\operatorname{tr} \underline{A}) = \operatorname{Re} \lambda < 0$ (asymptotisch stabiler Fixpunkt)

Def.: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren.

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder

Attraktoren

Beispiel: Lorenz-Modell (Edward Lorenz J. Atmos. Science 20, 130 (1963))

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = -xz + ry - y$$

mit Konstanten $\sigma, r, b > 0$

$$\dot{z} = xy - bz$$

Linearisierung: $\underline{A} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & r-1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \text{eig} \underline{A} = -(\sigma+1+b) < 0$

$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ (monotones Schmelzen des Phasenraums)

Herausheben: Semi-klassische Lasergleichungen (Maxwell-Block-Gleichungen) sind äquivalent zum Lorenz-Modell.

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt.

Def: Sei \underline{F} ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$.

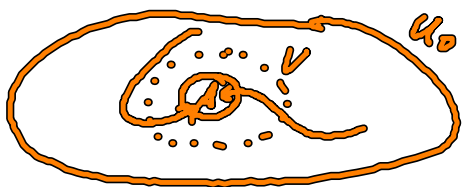
Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante ($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare

Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor, falls

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$ ($t > 0$)

(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0 \exists T > 0$, so dass $\phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$), d.h.

es gibt ein Attraktorbahn U_0 , aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft.



Beispiele für Attraktoren:

Mindestdim. n
des Phasenraums

	Attraktor	Attraktor- dimension	
1	stabiler Fixpunkt	0	
2	stabiler Grenzzyklus	1	periodische Orbit
3	stabiler Torus	2	quasiperiodisch (2 Frequenzen ω_1, ω_2 mit $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$)
3	seltsamer Attraktor	$2 < d < 3$ (fraktal)	chaotisch

1.3 Bifurkationen

Frage: Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollparameter μ ?

Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem kritischen

Wert μ_c ändern \rightarrow Bifurkation („Verzweigung“ der Lösungsanzahl/fähigkeit)

Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität

Bifurkationen sind verknüpft mit Stabilitätswechsel

(\rightarrow Untersuchung lineare Stabilität der Fixpunkte im Fall von lokalen Bifurkationen)

Klassifizierung der einfachsten Bifurkationen:

(A) Eigenwert - Null - Bifurkationen: $\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$

stabil

instabiler Fixpunkt

Fixpunkt
($\dot{x} = 0$)

($\dot{x} < 0$)

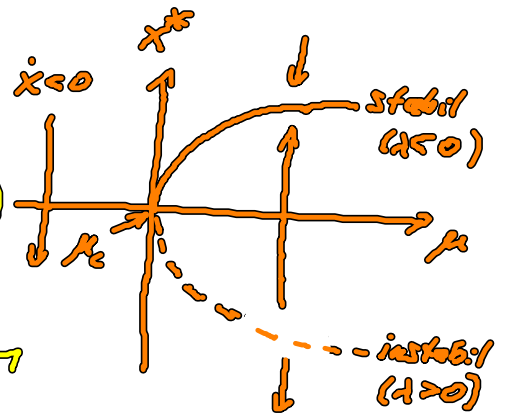
(A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

Normalform: $\dot{x} = \mu - x^2$

Fixpunkt: $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ (existiert nur für $\mu \geq 0$)

Linearisierung: $\dot{x} = \mu - x^2$: $\dot{x} = -2x^* \delta x$

$\lambda \leq 0$ für $x^* = \pm\sqrt{\mu}$



Bifurkationsdiagramm

$\mu_c = 0$: $\lambda = 0$ Bifurkationspunkt