

English summary: 1.2 continued

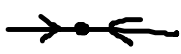



An attractor is a subset $A \subset M$ satisfying

(i) $A \subset U_0$ (open neighborhood of A) such that $\phi_t(U_0) \subset U_0$ ($t > 0$)

(ii) $\forall V$ with $A \subset V \subset U_0 \exists T > 0$ such that $\phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$)

i.e. there exists a basin of attraction U_0 such that the flow $\phi_t(U_0)$ asymptotically approaches A .

examples:

Minimum dimension of phase space	attractor name	dimension of attractor	
1	stable fixed point	0	
2	stable limit cycle	1	 periodic
3	stable torus	2	 quasiperiodic $\omega_1, \omega_2 \notin \mathbb{Q}$
3	strange attractor	$2 < d < 3$	 chaotic

Correction of the Lorenz system:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \right\} \xRightarrow{\text{linearization}} A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

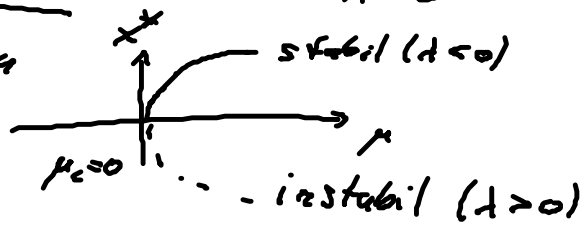
Fortssetzung: 1.3 Bifurkationen

Klassifizierung:

(A) Eigenwert-Null-Bifurkation: $\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$

(A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu - x^2$$



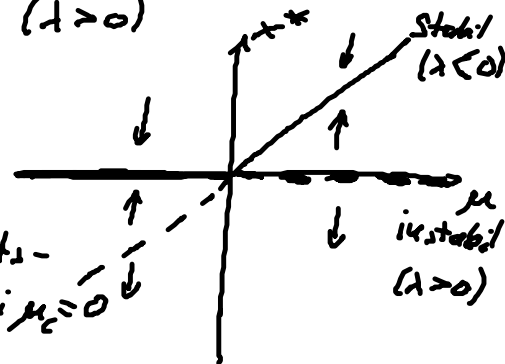
(A2) Transkritische Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \Rightarrow \delta \dot{x} = (\mu - 2x^*) \delta x$$

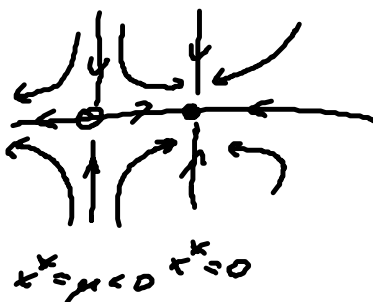
$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$$

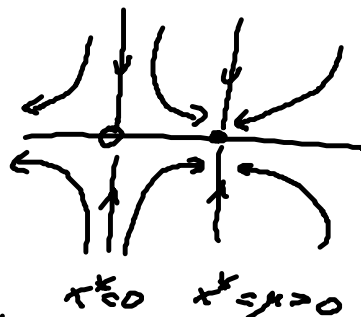
\Rightarrow Stabilitätswechsel bei $\mu_c = 0$



Generalisierung in $n=2$:



bzw.



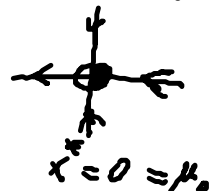
$$\leftarrow \circ \rightarrow \leftarrow x \quad \leftarrow \circ \rightarrow \leftarrow x$$

$x^* = \mu < 0 \quad x^* = 0$

$$\leftarrow \circ \rightarrow \leftarrow x \quad \leftarrow \circ \rightarrow \leftarrow x$$

$x^* = 0 \quad x^* = \mu > 0$

Bifurkation bei $\mu_c = 0$



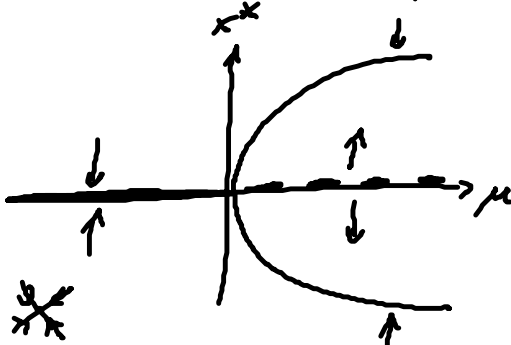
(A3) Stiumgabel-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \Rightarrow \delta \dot{x} = (\mu - 3x^2) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \pm \sqrt{\mu} \text{ für } \mu > 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \\ -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \end{cases}$$

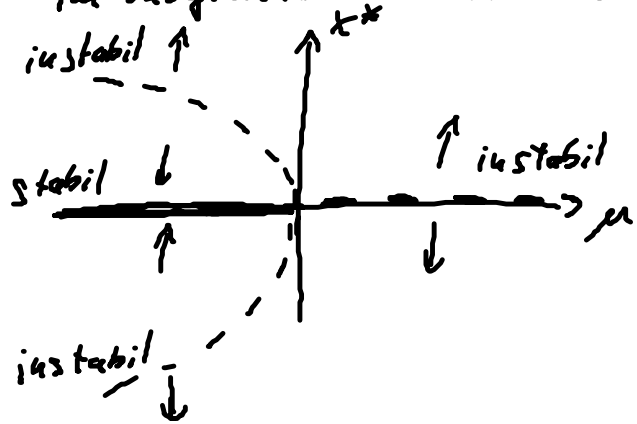
$\mu_c = 0$ Entstehung 2 weiterer Fixpunkte
 $\mu < 0$: 1 FP, $\mu > 0$: 3 FP



(Superkritische Stimmungabel-Bifurkation)

im Vergleich: subkritische Stimmungabel-Bifurkation:

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$



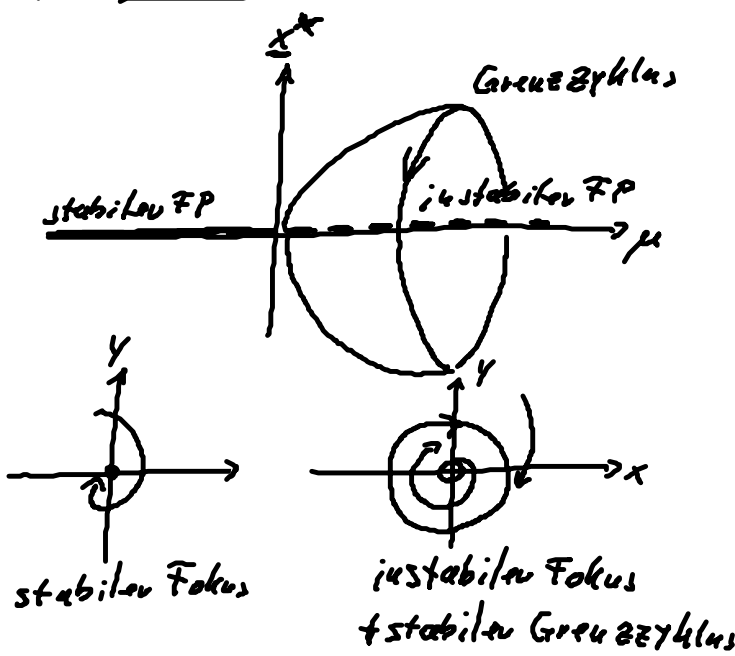
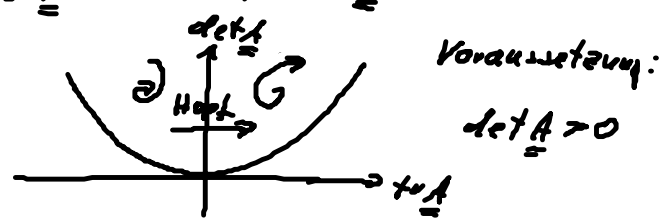
(B) Hopf-Bifurkation (Andronov-Hopf-Bifurkation)

$n=2$: Eigenwerte des Fixpunktes

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$$

$\lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$
 stabiler FP \rightarrow instabiler FP

$$\text{tr} A < 0 \rightarrow \text{tr} A > 0$$



Hopf-Normalform: generische Taylor-Entwicklung in der Nähe der Hopf-Bifurkation (2D-Zentrumsmannigfaltigkeit)

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+i\gamma)|z|^2)z \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

linearer Anteil \Rightarrow nichtlinearer Anteil \Rightarrow Bifurkation eines Grenzzyklus

lineare Stabilitätsanalyse des Fixpunktes: $\dot{z} = 0$, $\dot{z} = (\lambda + i\omega)z$

Eigenwerte:
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \frac{\text{tr} A}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{tr} A)^2}{4} - \det A}$$

$$= \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 - \omega^2}$$

$$= \lambda \pm i\omega$$

Transformation auf Amplitude r und Phase φ :

$$z(t) = r(t) e^{i\varphi(t)} \Rightarrow \dot{z} = \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda \pm i\omega \mp (1 \mp i\gamma) r^2) r e^{i\varphi}$$

Re: $\dot{r} = (\lambda \mp r^2) r \Rightarrow r^* = 0, (r^*)^2 = \pm \lambda \begin{cases} \lambda > 0 \text{ superkritisch} \\ \lambda < 0 \text{ subkritisch} \end{cases}$

Im: $k\dot{\varphi} = (\omega \mp \gamma r^2) \lambda \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega - \gamma \lambda \Rightarrow \varphi = \underbrace{(\omega - \gamma \lambda)}_{\text{Frequenz}} t$

$(r^*)^2 = \pm \lambda$

Im Bifurkationspunkt $\lambda = 0$ entsteht ein Grenzzyklus mit Amplitude $r = \sqrt{\pm \lambda}$ und Frequenz $\omega - \gamma \lambda \Big|_{\lambda=0} = \omega \neq 0$
 „Stuart-Landau-Oszillator“

Stabilität des Grenzzyklus aus der Floquet-Theorie:

$\dot{z} = f(z)$ mit periodischem Orbit $z^*(t) = z^*(t+T)$, T : Periode

$\delta \dot{z} = Df \Big|_{z^*(t)} \delta z$ mit $Df(t) = Df(t+T)$: lineare gewöhnliche Differenzialgleichung mit periodischen Koeffizienten

\Rightarrow Dann gilt: Lösung $\delta z(t) = \sum_j C_j e^{\lambda_j t} u_j(t)$ mit $u_j(t) = u_j(t+T)$
 Floquet-Moden

Einsetzen liefert: $\lambda_j u_j + \dot{u}_j = Df u_j \quad \forall j$ und $\lambda_j \in \mathbb{C}$ Floquet-Exponenten
 $\delta z(t) = U(t) \delta z(0)$ so dass $\mu e^{\lambda T}$ (Floquet-Multiplikatoren) Eigenwerte von $U(T)$ sind.
 ↑
 (Zeitenwicklungsoperator)

hier (Stuart-Landau-Oszillator):

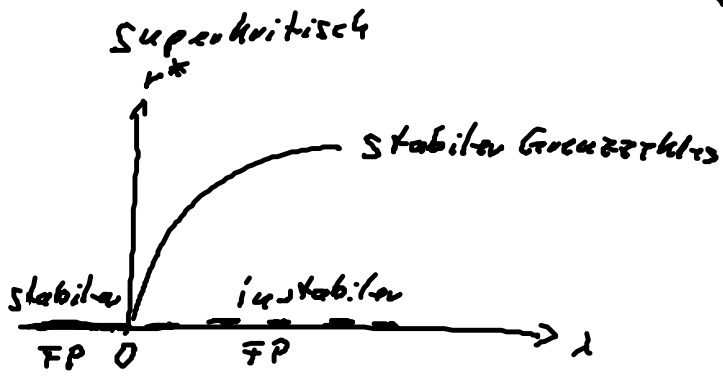
analytische Lösung möglich in r, φ

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mp 3r^2 & 0 \\ \mp 2\gamma r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ \mp 2\gamma \sqrt{\pm \lambda} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

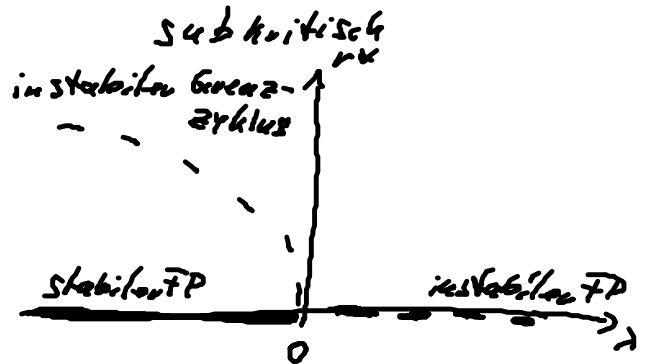
$z^*(t) = r^* e^{i\varphi(t)}$

Floquet-Exponenten sind die Eigenwerte von $\frac{A}{T}$: $\Lambda^2 + 2\lambda\Lambda = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\lambda \end{pmatrix}$$



$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1+i\gamma)|z|^2)z$$



$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+i\gamma)|z|^2)z$$