

English summary: 1.2 continued





An attractor is a subset $A \subset M$ satisfying

(i) $A \subset U_0$ (open neighborhood of A) such that $\phi_t(U_0) \subset U_0$ ($t > 0$)

(ii) $\forall V$ with $A \subset V \subset U_0$ $\exists T > 0$ such that $\phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$)

i.e. there exists a basin of attraction U_0 such that the flow $\phi_t(U_0)$ asymptotically approaches A .

examples:

Maximum dimension of phase space	attractor name	dimension of attractor	
1	stable fixed point	0	
2	stable limit cycle	1	 periodic
3	stable torus	2	 quasiperiodic $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$
3	strange attractor	$2 < d < 3$	 chaotic

Correction of the Lorenz system:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = -x z + r x - y$$

$$\dot{z} = x y - b z$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -x z + r x - y \\ \dot{z} = x y - b z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \text{linearization} \end{array} A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

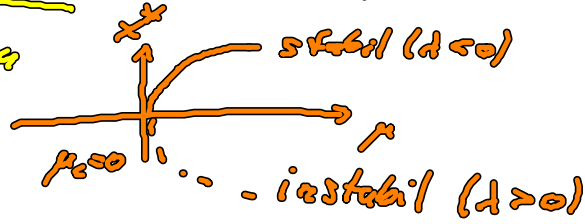
Fortssetzung: 1.3 Bifurkationen

Klassifizierung:

(A) Eigenwert-Vork-Bifurkation: $\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$

(A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

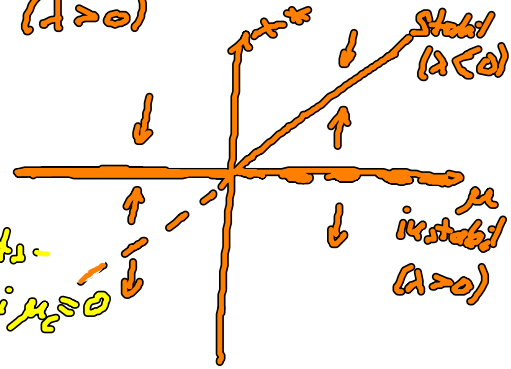


(A2) Transkritische Bifurkation

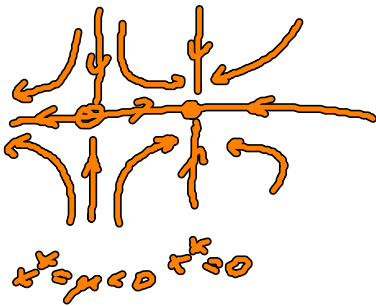
$$\dot{x} = \mu x - x^2 \Rightarrow \delta \dot{x} = (\mu - 2x^*) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases}$$

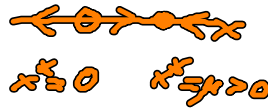
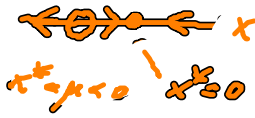
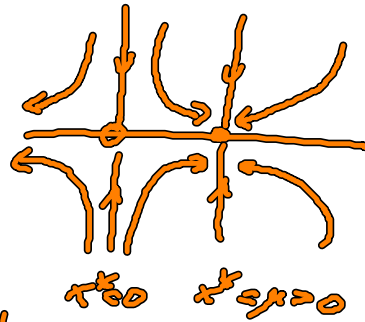
$$\lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases} \Rightarrow \text{Stabilitätswechsel bei } \mu_c = 0$$



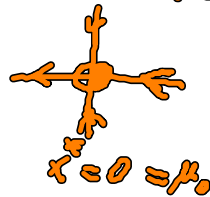
Generalisierung in $n=2$:



bzw.



Bifurkation bei $\mu_c = 0$



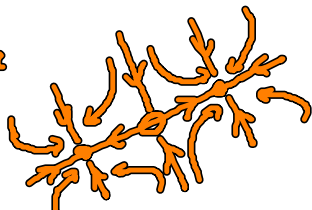
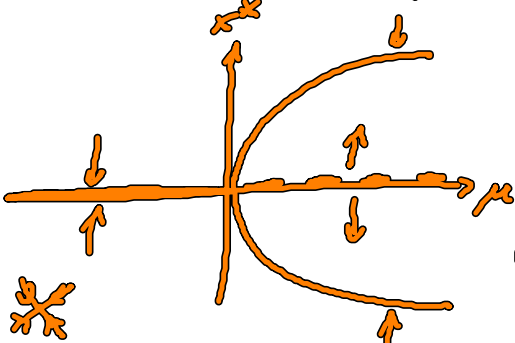
(A3) Stimmgabel-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \Rightarrow \delta \dot{x} = (\mu - 3x^*)^2 \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \pm \sqrt{\mu} \text{ für } \mu > 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \\ -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \end{cases}$$

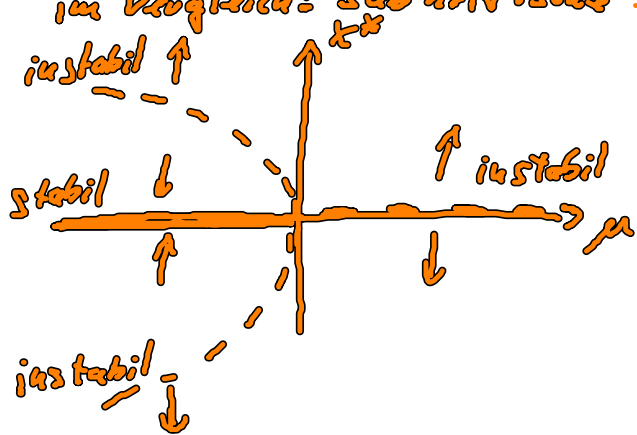
$\mu_c = 0$ Entstehung 2 weiterer Fixpunkte
 $\mu < 0$: 1 FP, $\mu > 0$: 3 FP



(Superkritische Störungsgabel-Bifurkation)

im Vergleich: subkritische Störungsgabel-Bifurkation:

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$



(B) Hopf-Bifurkation (Andronov-Hopf-Bifurkation)

$n=2$: Eigenwerte des Fixpunktes

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$$

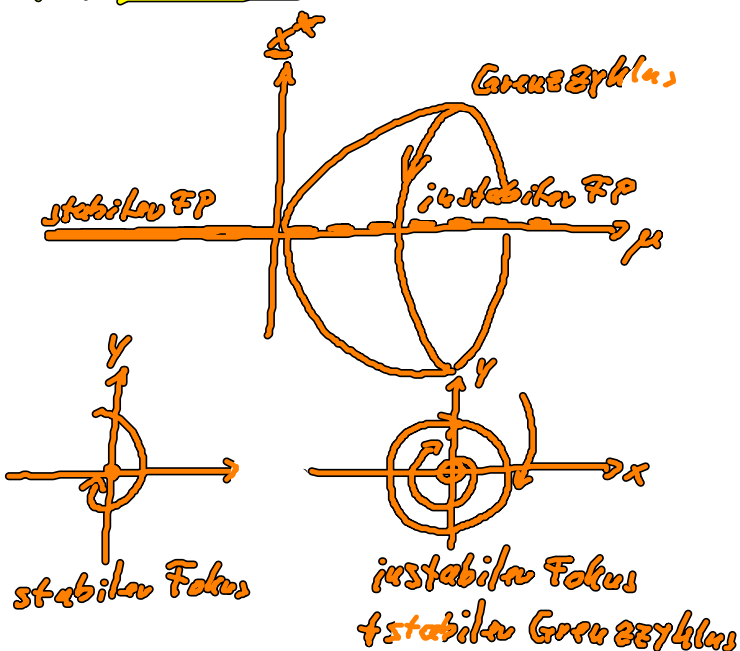
$\lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$
 stabiler FP instabiler FP

$$\tau_0 < 0 \rightarrow \tau_0 > 0$$



Voraussetzung:

$$\det A_0 > 0$$



Hopf-Normalform: geometrische Taylor-Entwicklung in der Nähe der Hopf-Bifurkation (2D-Zentrummannigfaltigkeit)

$$\dot{z} = \underbrace{(\lambda + i\omega)}_{\text{linearer Anteil}} z + \underbrace{\tau (1 + i\gamma) |z|^2}_{\text{nichtlinearer Anteil}} z \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

linearer Anteil nichtlinearer Anteil \Rightarrow Bifurkation eines Grenzzyklus

lineare Stabilitätsanalyse des Fixpunktes: $\dot{z} = 0$, $J\dot{z} = (\lambda + i\omega) z$

Eigenwerte:
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \frac{\tau_0 \pm \sqrt{\frac{(\tau_0 \pm \tau_0)^2}{4} - \det A_0}}{2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 - \omega^2}$$

$$= \lambda \pm i\omega$$

Transformation auf Amplitude r und Phase φ :

$$z(t) = r(t) e^{i\varphi(t)} \Rightarrow \dot{z} = \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda \pm i\omega \mp (1 \pm i\gamma) r^2) r e^{i\varphi}$$

Re: $\dot{r} = (\lambda \mp r^2) r \Rightarrow r^* = 0, (r^*)^2 = \pm \lambda$ $\left(\begin{array}{l} \lambda > 0 \text{ superkritisch} \\ \lambda < 0 \text{ subkritisch} \end{array} \right)$

Im: $k\dot{\varphi} = (\omega \mp \gamma r^2) k \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega - \gamma\lambda \Rightarrow \varphi = (\omega - \gamma\lambda)t$
 $(r^*)^2 = \pm \lambda$ Frequenz

Im Bifurkationspunkt $\lambda = 0$ entsteht ein Grenzzyklus mit Amplitude $r = \sqrt{\pm \lambda}$ und Frequenz $\omega - \gamma\lambda \Big|_{\lambda=0} = \omega \neq 0$
 „Stuart-Landau-Oszillator“

Stabilität des Grenzzyklus aus der Floquet-Theorie:

$$\dot{z} = f(z) \text{ mit periodischem Orbit } z^*(t) = z^*(t+T), T: \text{Periode}$$

$$\delta \dot{z} = Df \Big|_{z^*(t)} \delta z \text{ mit } Df(t) = Df(t+T) : \text{lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten}$$

$$\Rightarrow \text{Dann gilt: Lösung } \delta z(t) = \sum_j C_j e^{\lambda_j t} u_j(t) \text{ mit } u_j(t) = u_j(t+T)$$

Floquet-Moden

Einsetzen liefert: $\lambda_j u_j + \dot{u}_j = Df u_j \quad \forall j$ und $\lambda_j \in \mathbb{C}$ Floquet-Exponenten

$$\delta z(t) = U(t) \delta z(0) \text{ so dass } \mu \in \mathbb{C} \stackrel{\uparrow T}{\text{Floquet-Multiplikatoren}}$$

Eigenwerte von $U(T)$ sind.

(Zeitentwicklungoperator)

hier (Stuart-Landau-Oszillator):

analytische Lösung möglich in r, φ

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mp 3r^2 & 0 \\ \mp 2\gamma r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ \mp 2\gamma \sqrt{\pm \lambda} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

$z^*(t) = r^* e^{i\varphi^*(t)}$

Floquet-Exponenten sind die Eigenwerte von $\frac{A}{T}$: $\lambda^2 + 2\lambda\lambda = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\lambda \end{pmatrix}$$

