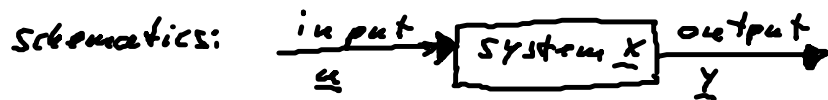


English summary

2 Concepts of control

2.1 Open and closed loop control



\underline{u} : control signal/variable

model: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$

\underline{x} : dynamical variable

$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u})$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$

\underline{y} : output

Def: A (linear) system $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}$ with $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ and target state \underline{x}_1 is completely controllable, if there exists a controller \underline{u} such that the system starting at any \underline{x}_0 reaches $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ in finite time t_1 .

Theorem: The following is equivalent:

(i) The time-invariant system $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t)$ is completely controllable.

(ii) The controllability matrix $\underline{K} = (\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \underline{A}^2\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B})$ has rank n .

(iii) If $\underline{p} \neq 0$ is eigenvector of \underline{A}^T , then $\underline{p}^T \underline{B} \neq 0$.

(iv) $\text{rank}(\lambda \underline{I} - \underline{A} \underline{B}) = n \quad \forall \lambda$



2.2 Chaoskontrolle

Kriterien für Chaos:

- Lyapunov-Exponent positiv, lokale Instabilität, bei globaler Begrenzung (seltsame Attraktoren)

- Nichtlinearitäten (lineare Systeme mit lokalen Instabilitäten sind nicht begrenzt)
- minimale Dimension = 3 (Überschneidungen von Trajektorien nicht erlaubt)
- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen (Schmetterlingseffekt)
- wiederkehrende Trajektorien:

$$\forall \epsilon > 0 \exists T_\epsilon > 0 : \forall t \geq 0 \exists T(t, \epsilon) \text{ mit } 0 < T(t, \epsilon) < T_\epsilon :$$

$$|\underline{x}(t + T(t, \epsilon)) - \underline{x}(t)| < \epsilon$$

in Worten: lokal stabile Trajektorien kommen sich auf lange Zeiten beliebig nahe.

=> Ansatz für Kontrollmethode in chaotischen Systemen:

- kleine Änderung (Kontrolleingriff) \rightarrow große Wirkung (Veränderung der Stabilität)
- Wenn die Trajektorie jedem Punkt des Attraktors beliebig nahe kommt, braucht man nur Geduld, um automatisch in der Nähe eines Zielzustandes zu landen und diesen dann mit kleinen Kontrolleingriffen zu erreichen.

2.2.1 OGY-Kontrolle

OGY steht für Ed Ott, Celso Grebogi, James Yorke

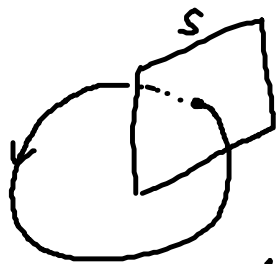
Idee: i) Überführung von $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ in eine diskrete Abbildung mittels Poincaré-Schnitten.

ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustandes ist.

Poincaré-Schnitt: Definiere Hyperebene $S = \{x: \underbrace{s(x)} = 0\}$ mit $x_1(0) \in S$

Gl. der Ebene

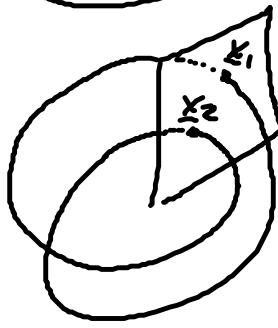
Beispiele:



$$x_1(0) = x_1(0+T)$$

Periode 1-Orbit (Periode T)

$\Rightarrow x_1$: Fixpunkt auf S



abwechselnd $x_1, x_2, x_1, x_2, \dots$ im Poincaré-Schnitt

Periode 2-Orbit

Poincaré-Abbildung: $\underline{x} \rightarrow \underline{P}(\underline{x}, \underline{y})$: 1. Wiederkehrpunkt auf Fläche S (Durchstoßpunkt)

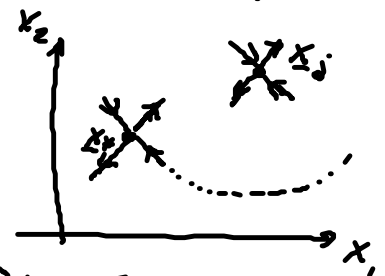
\Rightarrow Folge von Punkten $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(\underline{x}_k, \underline{y}_k)$ mit $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$ und t_k Zeitpunkt des k-ten Durchstoßes von S und $\underline{y}_k = \underline{y}(t)$ konstant für $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Dann kann man die Differentialgleichung $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{y})$ durch eine diskrete iterierte Abbildung ersetzen: $\underline{\tilde{x}}_{k+1} = \underline{P}(\underline{\tilde{x}}_k, \underline{y}_k)$ mit $\underline{\tilde{x}}_k = \underline{x}_k - \underline{x}_*$ (Abweichung vom Zieldurchstoßpunkt \underline{x}_*)

OGY-Kontrolle mittels:

$$\underline{y}_k = \begin{cases} C \underline{\tilde{x}}_k & \text{wenn } |\underline{\tilde{x}}_k| \leq \Delta \text{ (Umgebung von } \underline{x}_*) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Kontrollsignal wird generiert, wenn die Trajektorie in der Nähe von \underline{x}_* ist.



Idee: Fixpunkt auf S so verschieben, dass nächstes \underline{x}_{j+1} auf stabiler Mannigfaltigkeit von \underline{x}_* landet.

\underline{x}_* Sattelpunkt in S $\hat{=}$ instabiler periodischer Orbit im ursprünglichen System

Poincaré-Schnitt S

Stabilisiere $\underline{x}_* \rightarrow$ Stabilisierung des Orbits

(siehe auch Aufgabe 7, 4. Übungsblatt)

Nachteile: - evtl. Wartezeiten

- Kenntnis des Zielzustandes \underline{x}_*
- Poincaré-Schnitt in Realität schwer zu bestimmen
- rechenintensiv

2.2.2 Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

"time-delayed feedback" oder Pyragas-Kontrolle

PHYSICS LETTERS A

Physics Letters A 170 (1992) 421-428
North-Holland

Continuous control of chaos by self-controlling feedback

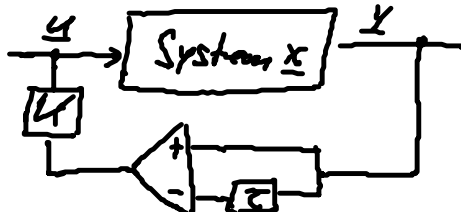
K. Pyragas^{1,2}

Institute for Theoretical Physics, Technical University of Berlin, W-1000 Berlin, Germany

Idee: Verwende statt \underline{x}_* (Zielzustand) eine zeitverzögerte Version des Ausgangssignals (Output) $\underline{y}(t)$: $\underline{y}(t-z)$

\Rightarrow Pyragas-Kontrolle: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{k} (\underline{y}(t) - \underline{y}(t-z))$

Schema:



"closed loop", geschlossener Kontrollkreis, (Selbst-)Regelung

Vorteil: - keine Kenntnis des Zielzustandes nötig

- Nichtinvasivität: Verschwindende Kontrollkraft bei erfolgreicher Stabilisierung

Beispiele: i) Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits mit Periode T ;

Bei der Wahl von $z = T$ gilt bei erfolgreicher Stabilisierung

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(t-z) \text{ und somit } \underline{u} = 0$$

ii) Stabilisierung von Fixpunkten ↻

Kontrollparameter: τ : Zeitverzögerung

\underline{k} : Rückkopplungsmatrix (häufig: $\underline{k} = k \underline{1}$)

Skalar (Rückkopplungsstärke)

Beispiel: Rössler-System

$$\dot{x}(t) = -y(t) - z(t) - k(x(t) - x(t-\tau))$$

$$\dot{y}(t) = x(t) + a y(t)$$

$$\dot{z}(t) = b + z(t) (x(t) - \mu)$$

Nichtlinearität

unkontrolliertes System

unkontrolliertes System: chaotisch z.B. für $a=0.2, b=0.2, \mu=6.5$

=> Periode 1-Orbit mit $T_1 = 5.91679$

Periode 2-Orbit mit $T_2 = 11.82814$

PHYSICAL REVIEW E 71, 016222 (2005)

Delayed feedback control of chaos: Bifurcation analysis

A. G. Balanov,¹ N. B. Janson,^{2,1} and E. Schöll¹

¹Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, Hardenbergstraße 36, D-10623 Berlin, Germany

²Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough, Leicestershire LE11 3TU, United Kingdom

Periode 1-Orbit stabilisiert (nichtinvasiv) für $0.29 < k < 2.3$

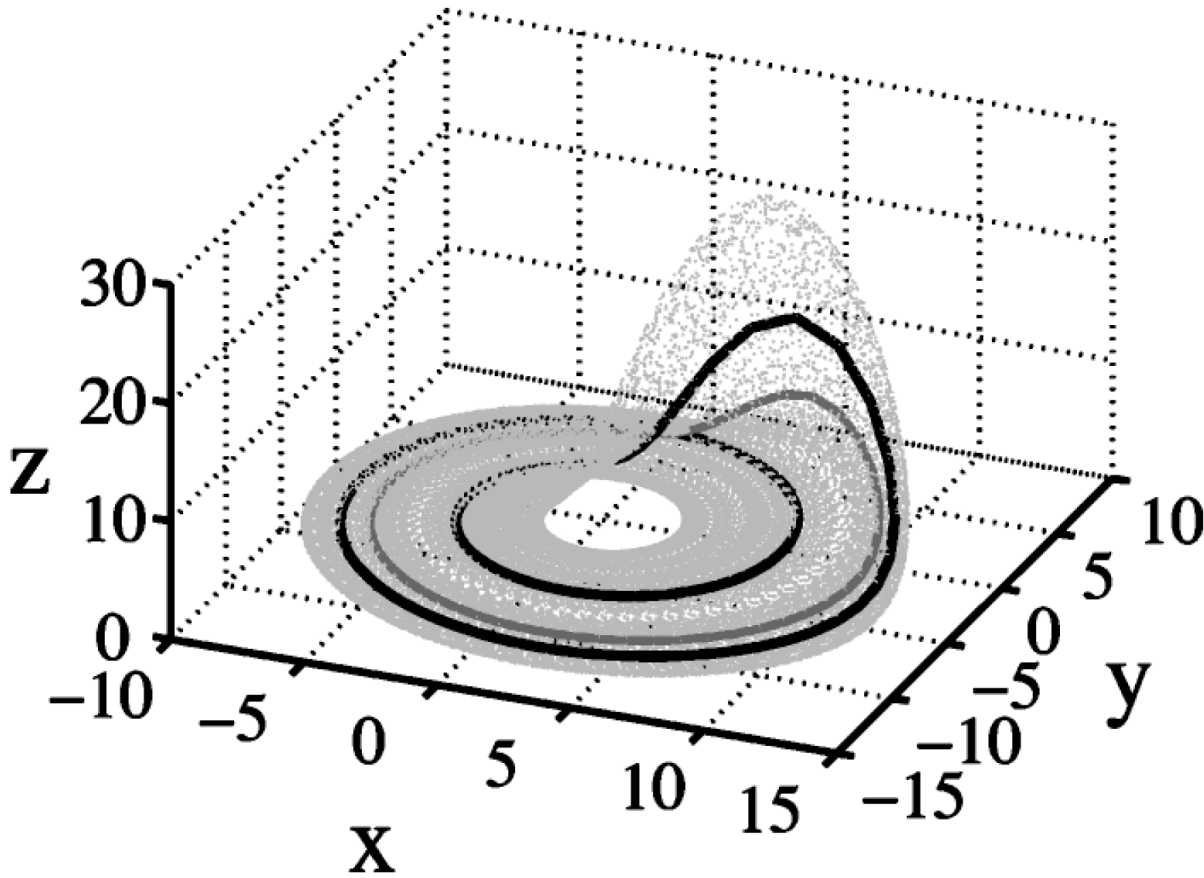


Fig 1 aus

rotier. Orbit: Periode 1-Orbit

Schwarzer Orbit: Periode 2-Orbit

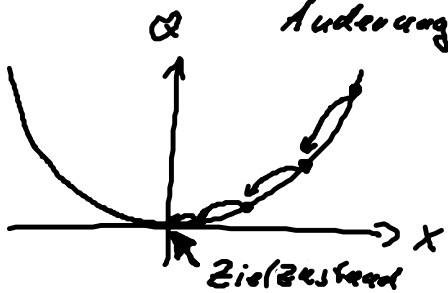
Vertiefung in Kapitel 3 „retardierte Systeme“ (Stabilitätsanalyse von Systemen mit Zeitverzögerungen, Erweiterung der Pyragas-Kontrolle...)

Referenzen: Handbook of Chaos Control, Hrsg: E. Schöll, H.-G. Schuster, Wiley (2008)

2.3 Adaptive Kontrolle

Idee: Kostenfunktion $Q(x(t), t)$ minimalisieren, $Q \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0$

Kontrollidee: Herleitung einer zusätzlichen Differentialgleichung für u , die Änderungen von Q berücksichtigt.



z.B.: $Q(x) = \frac{1}{2} (x(t) - x(t-\tau))^2$

Speed gradient method (A. Fradkov, I. Pirozhnik, V. Nikiforov Nonlinear and adaptive control of complex systems, Kluwer, 1999)

A. Fradkov: Cybernetical Physics: From Control to Quantum Control, Springer, 2008)

„speed“ von Q : $\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla_x Q(x, t) \cdot \dot{x}$
 $\dot{x} = f(x, u)$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{u} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}}$$

Γ : Proportionalitätskonstante

Richtung im u -Raum, in der \dot{Q} am stärksten abnimmt

$\Rightarrow \dot{Q} < 0 \Rightarrow Q$ nimmt ab $\Rightarrow Q \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Bsp.: Anwendung auf Pyragas-Kontrolle zur automatischen Regelung von der

Rückkopplungsstärke k : $\dot{k} = -\Gamma \nabla_k \dot{Q}$

z.B. im Rössler-System: $u = -k(x(t) - x(t-\tau))$