

English summary:

2.2 Chaos control

- chaos:
- sensitive dependence on initial conditions
 - local instabilities (positive Lyapunov exponents)
 - nonlinearities
 - minimal dimension = 3
 - recurring trajectories (2 trajectories will get arbitrarily close after some time)

2.2.1 OGY control

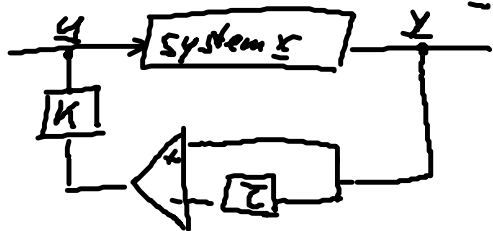
idea: Poincaré sections (intersection of hyperplane S with trajectory $\underline{x}(t)$) and Poincaré maps ($\underline{x} \mapsto \underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$) with $\underline{P}(\underline{x}, \underline{u}) \hat{=} \text{first return point on } S$
 \Rightarrow series of points: $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(\underline{x}_k, \underline{u}_k) = \min_{t > t_k} \{ \underline{x}(t; \underline{x}_k) \in S \}$, $t_k = k$ -th return time
and $\underline{u}_k = \text{const}$ for $t \in [t_k, t_{k+1}]$ $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$

OGY control: $\underline{u}_k = \begin{cases} c |\underline{x}_k - \underline{x}_*| & \text{if } |\underline{x}_k - \underline{x}_*| \leq \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$, \underline{x}_* : target point on S

2.2.2 Time-delayed feedback

idea: use delayed state/output $\underline{y}(t-\tau)$ as reference state

Pyragas control: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{K}(\underline{y}(t) - \underline{y}(t-\tau))$



2.3 Adaptive control

idea: minimize cost function $Q(\underline{x}(t), t) \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 0$

speed gradient method: $\dot{\underline{u}} = -\Gamma \nabla_{\underline{u}} \dot{Q}$, Γ : control gain (parameter) \underline{x}
gradient in \underline{u} -space ↑ speed of Q : $\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla_{\underline{x}} Q(\underline{x}, t) \cdot \underbrace{\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)}_{\text{independent of } \underline{u}}$

2.3 Adaptive Kontrolle (Fortsetzung)

Adaptive Kontrolle funktioniert auch zur Herleitung einer Gleichung für Kontrollparameter.

Bsp: $u(t) = -K[x(t) - x(t-\tau)]$ Pyragas-Kontrolle

angewendet auf das Rössler-System:

$$\dot{x} = -y - z - k(x(t) - x(t-\tau))$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + z(x-\mu)$$

und Kostenfunktion: $Q(x) = \frac{1}{2} (x(t) - x(t-\tau))^2$

$$\Rightarrow \dot{K} = - \int \mathbb{I}_k \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = (x(t) - x(t-\tau)) \left[\dot{x}(t) - \dot{x}(t-\tau) \right]$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 aus Systemgleichung $\dot{x} = -y - z - k(x - x_\tau)$

$$= [x(t) - x(t-\tau)] \underbrace{\left[-y(t) - z(t) - y(t-\tau) - z(t-\tau) \right]}_{\text{hängt nicht von } k \text{ ab}}$$

$$- k \left[x(t) - x(t-\tau) - x(t-\tau) + x(t-2\tau) \right]$$

$$\Rightarrow \dot{K} = - \int \frac{dQ}{dk} = \int [x(t) - x(t-\tau)] \left[x(t) - 2x(t-\tau) + x(t-2\tau) \right]$$

Information über das 2τ -Intervall

Adaptive tuning of feedback gain in time-delayed feedback control

J. Lehnert,¹ P. Hövel,^{1,2} V. Flunkert,¹ P. Yu. Guzenko,³ A. L. Fradkov,^{4,5} and E. Schöll¹

¹Institut für Theoretische Physik, TU Berlin, Hardenbergstraße 36, D-10623 Berlin, Germany

²Bernstein Center for Computational Neuroscience, Humboldt-Universität zu Berlin, Philippstr. 13, D-10115 Berlin, Germany

³SPb State Polytechnical University, Politechnicheskaya st., 29, St. Petersburg 195251, Russia

⁴Institute for Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Bolshoy Ave., 61, V. O., St. Petersburg 199178, Russia

⁵SPb State University, Universitetskii pr.28, St. Petersburg 198504, Russia

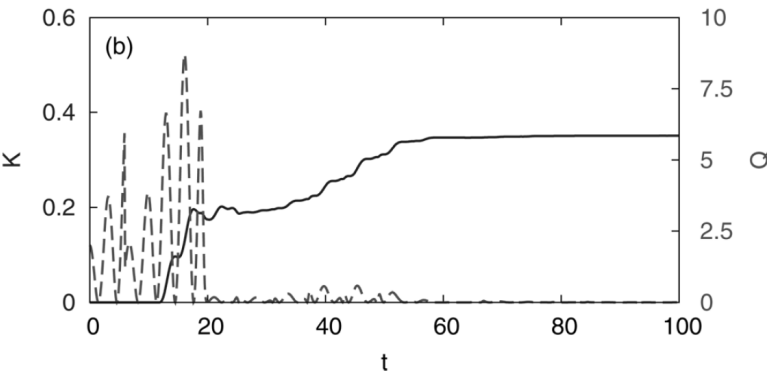
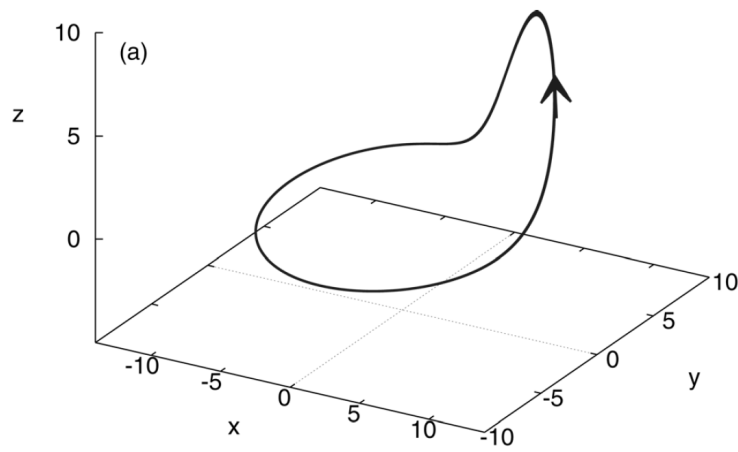


Fig. 5: Parameter: $a=0.2, b=0.2, \mu=6.5$
 $\Gamma=0.1$
 $\tau=T_1=5.91679$
 (Periode 1-Orbit)

\Rightarrow Rückkopplungsvärke stellt sich automatisch ein. Der Endwert (asymptotischer Wert für k) hängt von Γ und Anfangsbedingungen ab.
 $Q=0$: Kostenfunktion wird minimiert.

Weitere Verknüpfungen von Q mit u :

- $u(t) = u_0 - \Gamma \nabla_u Q(x, t)$

- $u(t) = u_0 - \Gamma \psi(x, u, t)$ mit $\psi^T(x, u, t) \cdot \nabla_u Q \geq 0$

- $u(t) = u_0 - \Gamma \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komponentenweise}}}{\text{sign}} \nabla_u Q$

- weitere Bedingungen: $g(x, u, t) = 0 \Rightarrow \dot{u}(t) = -\Gamma \nabla_u Q - \lambda \nabla_u g(x, u, t)$

weiteres Bsp: Stabilisierung eines Fixpunktes

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + \omega y - \kappa [x(t) - x(t-z)] \\ \dot{y} &= -\omega x + \lambda y - \kappa [y(t) - y(t-z)] \end{aligned} \right\} \text{Siehe Ausgabe 9}$$

λ : Bifurkationsparameter, Fixpunkt: $x^* = y^* = 0$, Eigenwerte $\lambda \pm i\omega$
 \rightarrow instabiler Fokus für $\lambda > 0, \omega \neq 0$

PHYSICAL REVIEW E 72, 046203 (2005)

Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods

P. Hövel* and E. Schöll

Institut für Theoretische Physik, TU Berlin, Hardenbergstraße 36, D-10623 Berlin, Germany

(Received 25 April 2005; published 4 October 2005)

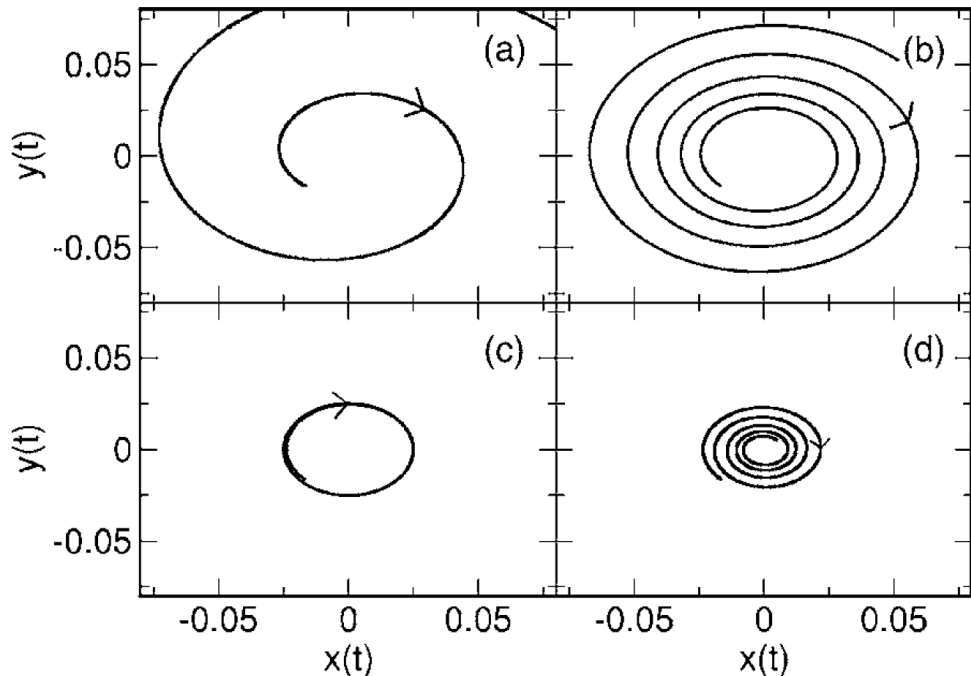
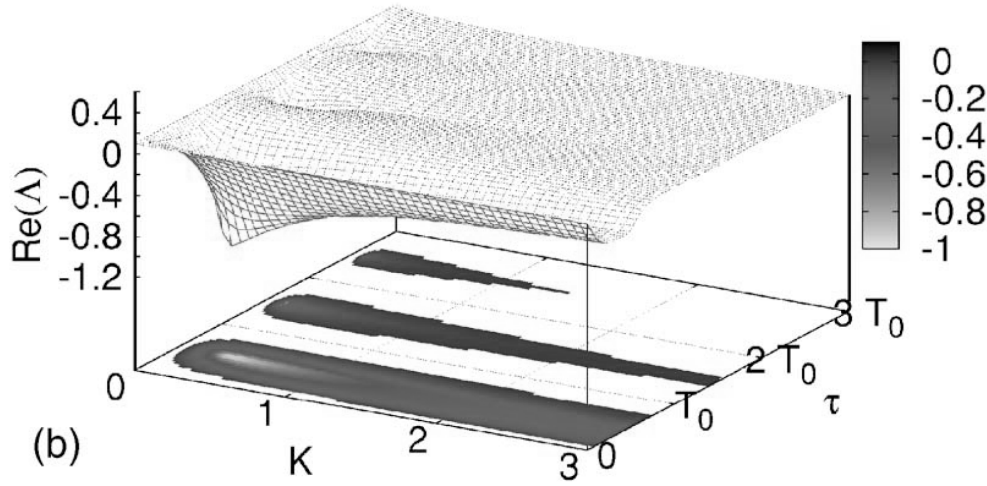


Fig 1: Parameter: $\lambda = 0.5, \omega = \pi$
 $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{2} = T_0/2$
 (a) $k=0$ (b) $k=0.2$
 (c) $k=0.25$ (d) $k=0.3$



Eigenwerte des kontrollierten Systems: $\lambda \in \mathbb{C}$

Kostenfunktion: $Q = \frac{1}{2} [(x(t) - x(t-\tau))^2 + (y(t) - y(t-\tau))^2]$

Berechne $\dot{k} = -\nabla \frac{d}{dk} Q$ (Übung 21.5.)

2.4 Quantenkontrolle

Kostenfunktion enthält Hamilton-Operator: $Q(q,p) = \frac{1}{2} (H(q,p) - H_x)^2$
 mit H_x als Zielenergie

Quantenmechanische Systeme:

Schrödinger-Gleichung: $i\hbar \partial_t \psi = \left(H_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^m u_k H_k}_{\text{Kontroll-Hamilton-Operator (Kontrollparameter } u_k)}} \right) \psi$
 ohne Kontrolle

Ziel: konstruiere u_k , so dass eine Observable Z im Mittel einer vorgegebenen Zielwert Z_x annimmt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi^* Z \psi \rangle = Z_x$

Skalarprodukt: $\int \psi^* z \psi d^3v = \langle \psi | z | \psi \rangle$

Idee: Speed gradient Methode anwenden: $Q(\psi) = \frac{1}{2} (\psi^* z \psi - z_k)^2$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q(\psi) = 0$

Annahme: z kommutiert mit H_0 (gleichzeitig schenkbare, keine Beeinflussung des quantenmechanischen Systems nur durch Messung von Q)

$$\nabla_{u_k} \dot{Q} = \nabla_{u_k} \left[(\psi^* z \psi - z_k) (\dot{\psi}^* z \psi + \psi^* z \dot{\psi}) \right]$$

$$= \nabla_{u_k} \left[(\psi^* z \psi - z_k) \frac{i}{\hbar} \psi^* \left(\underbrace{H_0 z - z H_0}_{=0} + \sum_{l=1}^n u_l (H_l z - z H_l) \right) \psi \right]$$

mit $\dot{\psi} = -\frac{i}{\hbar} (H_0 + \sum_l u_l H_l) \psi$

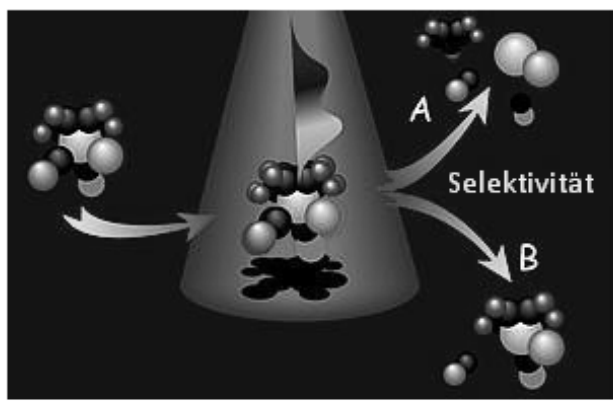
$$\Rightarrow \dot{u}_k = -\Gamma \nabla_{u_k} \dot{Q} = -\Gamma \frac{i}{\hbar} (\psi^* z \psi - z_k) [\psi^* (H_k z - z H_k) \psi]$$

adaptive Gleichung für Kontrollparameter u_k !

Anwendung: Kontrolle von chemischen Reaktionen auf molekularer Ebene

Quantenkontrolle

Aktive Kontrolle chemischer Reaktionen auf einer molekularen Ebene, mit anderen Worten das selektive Brechen und Knüpfen chemischer Bindungen, ist seit jeher ein Traum. Mit den konventionellen Kontrollmöglichkeiten der chemischen Synthese, wie etwa den makroskopischen Variablen Temperatur, Druck oder Konzentration, erhält man jedoch keinen direkten Zugang zum quantenmechanischen Reaktionsverlauf.



AG Brixner
(Würzburg)

Phys. Chem. J., 2470 (2007)

Chem. Phys. 4, 418 (2003)

Eine völlig andere Herangehensweise, um chemische Reaktionen zu beeinflussen, ist der Ansatz der Quantenkontrolle, bei dem die molekulare Dynamik mit speziell geformten Laserpulsen gelenkt wird, die sich zeitlich über wenige zehn bis hundert Femtosekunden erstrecken. Damit ist es möglich, effizient und selektiv einen gewünschten Reaktionskanal anzusprechen. In den letzten Jahren wurden die notwendigen experimentellen Techniken entwickelt, wodurch viele Durchbrüche auf diesem Forschungsgebiet erzielt wurden und eine Vielzahl an Reaktionen kontrolliert werden konnte. Die Quantenkontrolle hat sich somit als eine leistungsstarke Technik etablieren können.

2.5 Optimale Kontrolle

Betrachte $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$, $t \in [t_0, t_f]$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ Kontrollfunktion
 $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Kostenfunktional:

$$J[\underline{x}, \underline{u}] = \phi(\underline{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(\underline{x}, \underline{u}, t) dt$$

ϕ : beschreibt Abweichung vom gewünschten Endzustand $\underline{x}(t_f)$

F : weist den Zustands-, Ausgangs- und Eingangsgrößen Kosten zu.

Kontrollproblem: Finde $\underline{u}^*(t)$, so dass J minimal wird.

$\{\underline{u}^*(t) \in \bar{U}\}$ mit \bar{U} : Raum der möglichen Kontrollfunktionen

Bsp.: Parabolantenne (vgl. 2.1)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r}{J} \end{pmatrix} \underline{u} \quad \text{hier } J: \text{Trägheitsmoment}$$

Kostenfunktional:

$$J[\underline{x}, \underline{u}] = \underbrace{\underline{x}(t_f)^T \underline{M} \underline{x}(t_f)}_{(i)} + \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\underline{x}(t)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t)}_{(ii)} + \underbrace{\underline{u}(t)^T \underline{R} \underline{u}(t)}_{(iii)} dt$$

(i) Abweichung des Endzustands vom Zielzustand (Ziel: $\underline{x}_*(t_f) = 0$)

(ii) Einschwingverhalten („Summe der Abweichungen“)

(iii) gemittelttes Amplitudenquadrat der Eingangsspannung

Idee: Übersetzung des Kontrollproblems in ein Minimierungsproblem:

Aus der Systemgleichung folgt:

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) \left\{ \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}} \right\} dt = 0$$

Kozustandsfunktion
 $\lambda(t): [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Minimieren des Kostenfunktional $J[x, u]$ unter der Nebenbedingung $\dot{x} = f(x, u, t)$ ist äquivalent zum Minimieren von:

$$J[x, u] = \phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} [F(x, u, t) + \lambda(t) \{f(x, u, t) - \dot{x}\}] dt$$

Definiere Hamilton-Funktion: $H(x, u, t, \lambda) = F(x, u, t) + \lambda \cdot f(x, u, t)$

$$\Rightarrow J[x, u] = \phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{H - \lambda \dot{x}\} dt$$

Pontryagin'sches Maximumsprinzip:

Sei $u_x \in \bar{U}$ und $x_x = x(t, u_x)$ die zugehörige LösungsTrajektorie von $\dot{x} = f(x, u, t)$. Ist u_x optimal für $J[x, u]$, so erfüllt u_x die notwendigen Optimalbedingungen:

$$(i) H(x_x, u_x, \lambda) = \inf_{u \in \bar{U}} H \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_f]$$

$$\left(\text{d.h. } \frac{dH}{du} \Big|_{\substack{u_x \\ x_x}} = 0 \right)$$

$$(ii) \text{ Die Kostenstands Funktion } \lambda \text{ erfüllt: } \dot{\lambda} = -\nabla H$$

$$(iii) \lambda(t_f) = \nabla_x \phi(x_x(t_f))$$