

English summary →

3.2.1. Stabilizing unstable steady states

$$\text{ODE} : \dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} x - K(x(t) - x(t-\tau))$$

$$\text{characteristic polynomial: } \lambda + K(1 - e^{-\lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega$$

(solvable with Lambert ω -function)

- borders of stability determined by following $\text{Re}\lambda = 0$ in parameter space

- extended delayed feedback enlarges stability region

$$\text{ODE} : \dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} x - [K(x(t) - x(t-\tau)) + R u(t-\tau)]$$

3.2.2. Stabilizing unstable periodic orbits

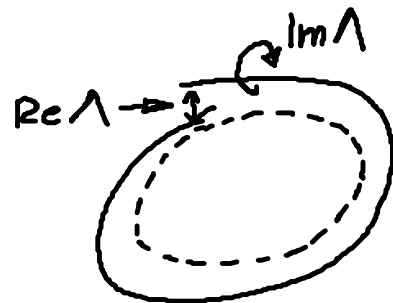
- odd number orbits without

torsion can be stabilized with feedback

↑ $\text{Im}\lambda$

$$u(t) = K \sum_{n=0}^{\infty} R^n [x(t-n\tau) - x(t-(n+1)\tau)]$$

↑ memory parameter

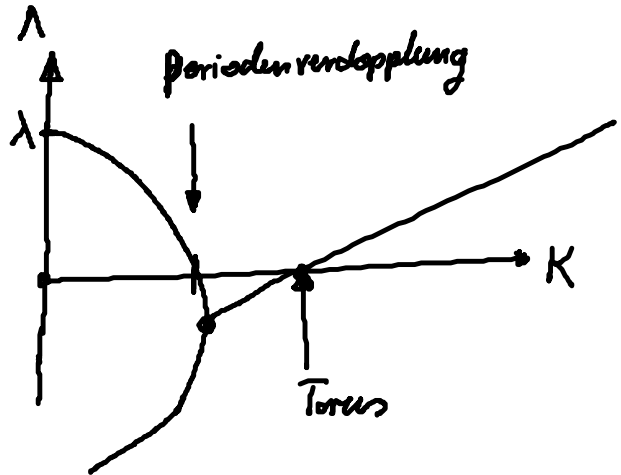


3.2.3. Chaos - Kontrolle durch zeitverzögerte Rückkopplung

Pyragas, Phys. Lett. A 170, 421 (1992)

$$\dot{x} = f(x) + K \underline{A} [x(t-\tau) - x(t)] \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \underline{A} \text{ Kopplungsmatrix } (n \times n)$$

$\dot{x} = f(x)$: chaot. Attraktor mit unendlich vielen UPOs (unstable periodic orbits)



unkontrolliertes Floquet-Problem

$$(\lambda + i\omega)u + \dot{u} = Df u$$

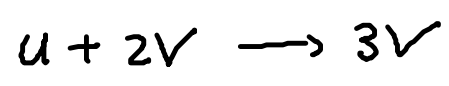
mit Kontrolle:

$$\Lambda u + \dot{u} = Df u + K(e^{-\Lambda T} - 1)u$$

Schöll u. Schuster (ed.): Handbook of chaos control

3.2.4 Kontrolle raum-zeitlicher Systeme

Gray - Scott - Modell [Reaktions - Diffusions - Systeme]



↑
Aktivator

V → P

↑
Abfallprodukt

↑
Inhibitor

↓
Konzentration von Spezies u

↓
Zufluss

↓
Diffusion

(wichtig: ständiger Zufluss von u → Nicht-Gleichgewicht)
"a"

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -uv^2 + a(1-u) + D_u \nabla^2 u \\ uv^2 - (a+b)v + D_v \nabla^2 v \end{pmatrix} + KA \begin{pmatrix} u(t-\tau) - u(t) \\ v(t-\tau) - v(t) \end{pmatrix}$$

Aktivator - Kontrolle

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inhibitor - Kontrolle

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CHAOS 19, 043126 (2009)

Control of spatiotemporal patterns in the Gray–Scott model

Y. N. Kyrychko,^{1,a)} K. B. Blyuss,¹ S. J. Hogan,¹ and E. Schöll²

¹Department of Engineering Mathematics, University of Bristol, Bristol BS8 1TR, United Kingdom

²Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, 10623 Berlin, Germany

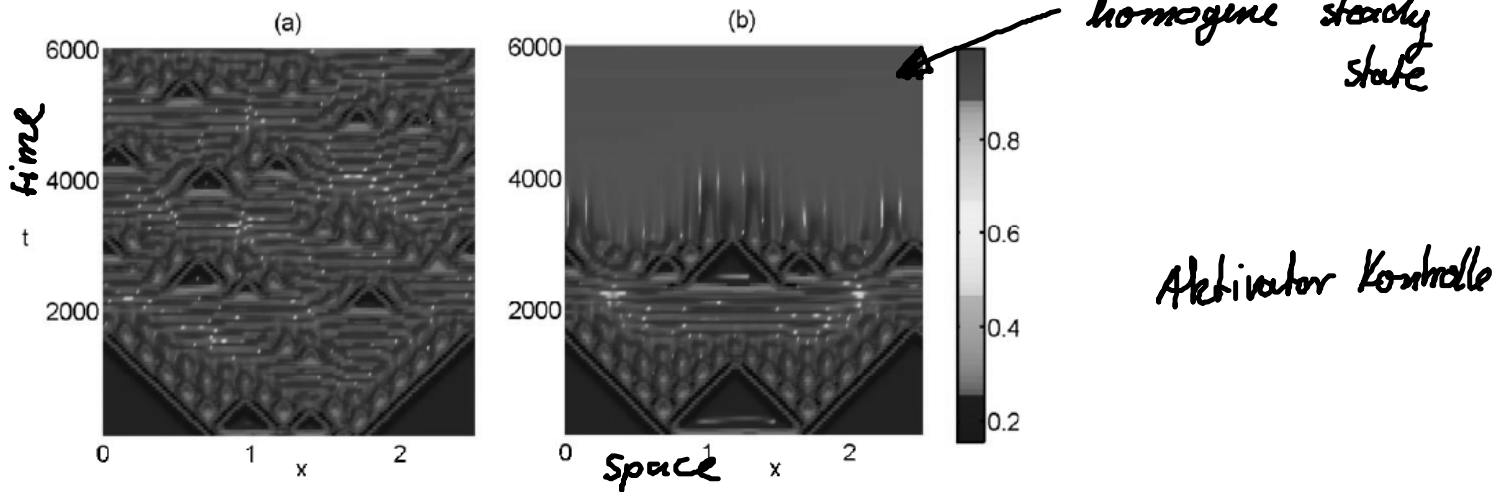
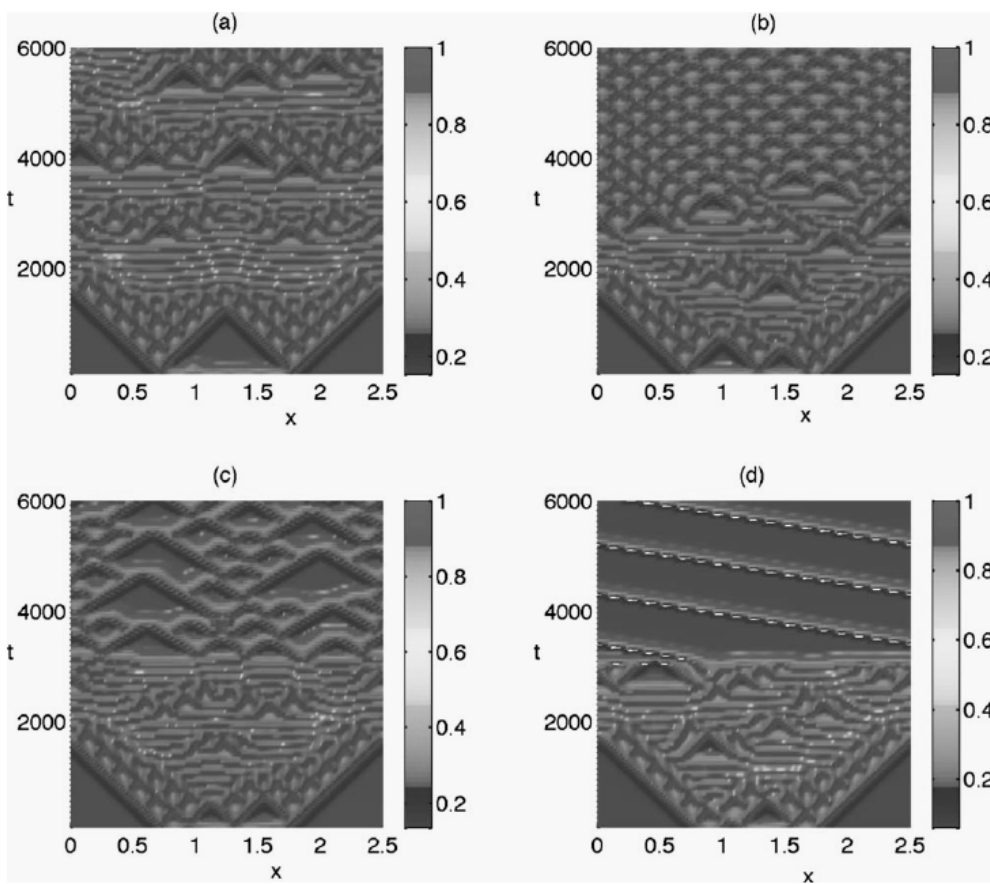


FIG. 4. (Color online) Space-time plot in the case of activator control. (a) Spatiotemporal chaos. (b) Nontrivial steady state E_1 . The color code corresponds to the values of $u(x,t)$. Parameter values are $a=0.028$, $b=0.053$, $D_u=2 \times 10^{-5}$, $D_v=10^{-5}$, (a) $K=-0.4$, $\tau=0.1$ and (b) $K=-0.8$, $\tau=0.6$. Control is switched on at $t=3000$.



mögliche Lösungen
(Muster) der
ODE mit delay

- a) Raum zeitliches Chaos

b) Turing - Hopf Mode

- Hopf Bifurkation im
Ort & in der Zeit

d) Traveling wave
Laufende Wellenlösung

FIG. 5. (Color online) Space-time plot in the case of inhibitor control. (a) Spatiotemporal chaos. (b) Mixed (Turing-Hopf) mode. (c) Coarsening. (d) Transition to traveling waves. Parameter values are $a=0.028$, $b=0.053$, $D_u=2 \times 10^{-5}$, $D_v=10^{-5}$, (a) $K=-0.05$, $\tau=0.3$, (b) $K=-0.3$, $\tau=0.35$, (c) $K=-0.4$, $\tau=0.4$, and (d) $K=-0.6$, $\tau=0.75$. Control is switched on at $t=3000$.

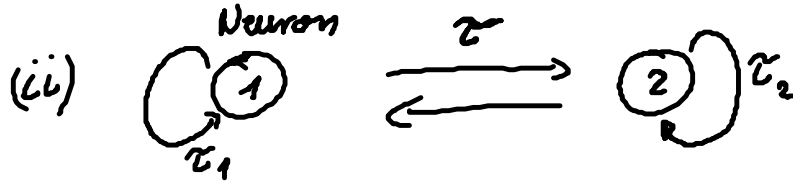
4. Gezoppelte Systeme und Netzwerke

4.1. 2 gezoppelte Systeme

Motivation: (i) Laser 1 $\overset{\tau}{\rightleftarrows}$ Laser 2

$\tau \neq 0$
Signallaufzeit

Fragestellung: z.B. Wann sind beide Laser
synchronisiert?



$z \neq 0$
durch neuronale Kopplung

• als Startpunkt: subkritische Hopf-Normalform

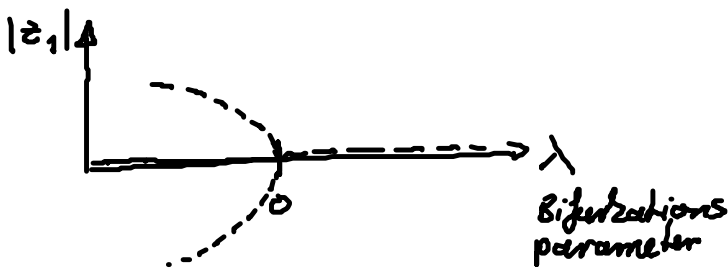
Systemgleichungen

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma)|z_1|^2)z_1 + a(z_2 - z_1)$$

$$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \in \mathbb{C} \end{matrix} \quad \dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma)|z_2|^2)z_2 + \underbrace{a(z_1 - z_2)}_{\text{diffusive Kopplung}}$$

↑
Vorsuchen von γ
entscheidet Stabilität vom
entstehenden LC

• einzelnes System



• gekoppelt: Suchen synchrone Zustand ($z_1(t) = z_2(t) = z_{\text{synch}}^{(t)}$)

→ Kopplung verschwindet ($z_1 - z_2 = 0$)

$$z_{\text{synch}} = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$$

OBdA: $\omega = 1$

$$\text{DGL: } \dot{z}_{\text{synch}} = \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i + (1 + i\gamma)r^2) e^{i\varphi} r$$

$$\text{Realteil: } \dot{r} = (\lambda + r^2) r$$

$$\text{Imaginarteil: } \dot{\varphi} = (1 + \gamma r^2)$$

(siehe 1.3)

$$\text{Stationäre Lösungen: } \dot{r} = 0 \rightarrow r^2 = -\lambda$$

$$\Rightarrow r_{\text{synch}} = \sqrt{-\lambda}$$

Phase des invarianten Orbits ($\varphi = \omega t$)

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{P} = 1 + \gamma r_{\text{synch}}^2 \\ = 1 - \lambda\gamma$$

$$\Rightarrow P_{\text{synch}} = \frac{2\pi}{1 - \lambda\gamma}$$

→ Lösung für synchronen Zustand

$$z_{\text{synch}} = \sqrt{-\lambda} e^{\frac{2\pi i}{P_{\text{synch}}} \cdot t}$$

• Gekoppelt: Weitere spezielle Lösungen?

$$\text{Verwende neue Koordinaten: } z_+ = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad \text{Mittelwert}$$

$$z_- = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \quad \text{Asynchronität}$$

Einsetzen der DGL

⇒

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) \quad \text{Hopf-Normalform}$$

$$= \frac{1}{2} \left[f(z_1) + f(z_2) + a(z_2 - z_1) + a(z_1 - z_2) \right]$$

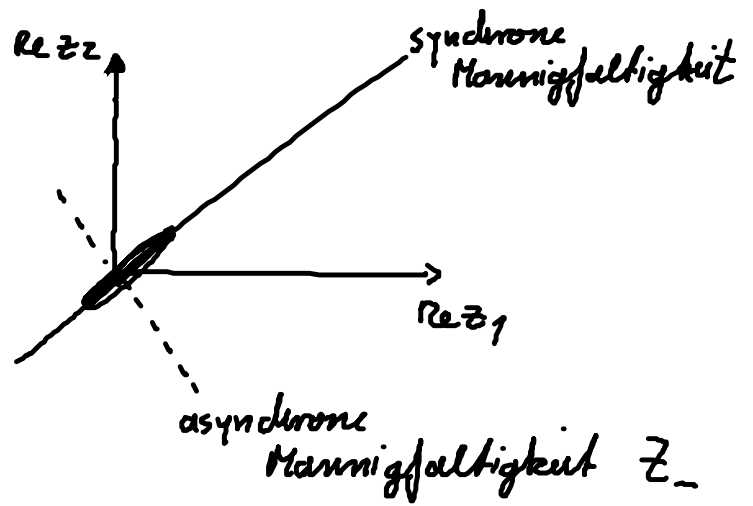
$$= \frac{1}{2} \left(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-) \right)$$

$$\dot{z}_- = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)$$

$$= \frac{1}{2} (f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-) - 2\alpha z_-)$$

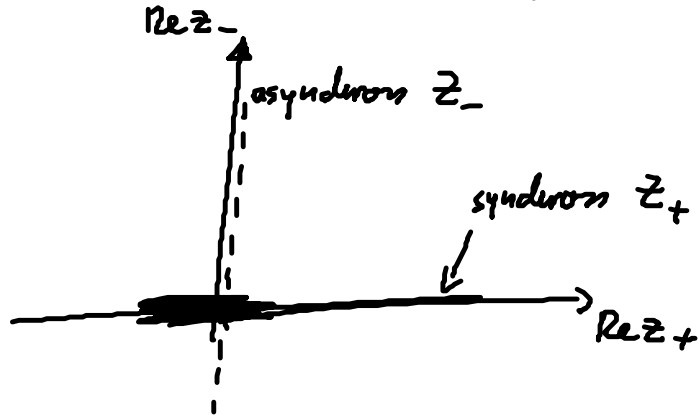
- Menge der gleichphasigen Lösungen

$$Z_+ := \{ (z_+, z_-) \mid z_- = 0 \}$$



- Menge der gegenphasigen Lösungen

$$Z_- := \{ (z_+, z_-) \mid z_+ = 0 \}$$



Lösung für asynchronen Zustand: $(z_+ = 0)$

$$\dot{z}_- = (\lambda + i + (1 + |\gamma|) |z_-|^2) z_- - 2\alpha z_-$$

$$\dot{z}_+ = 0$$

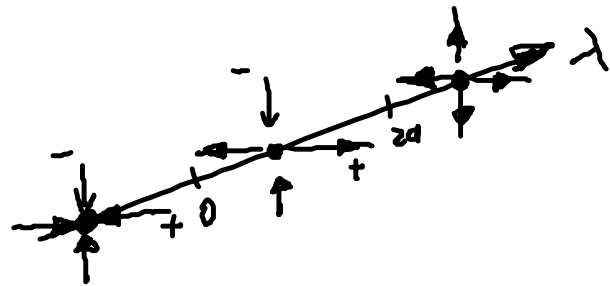
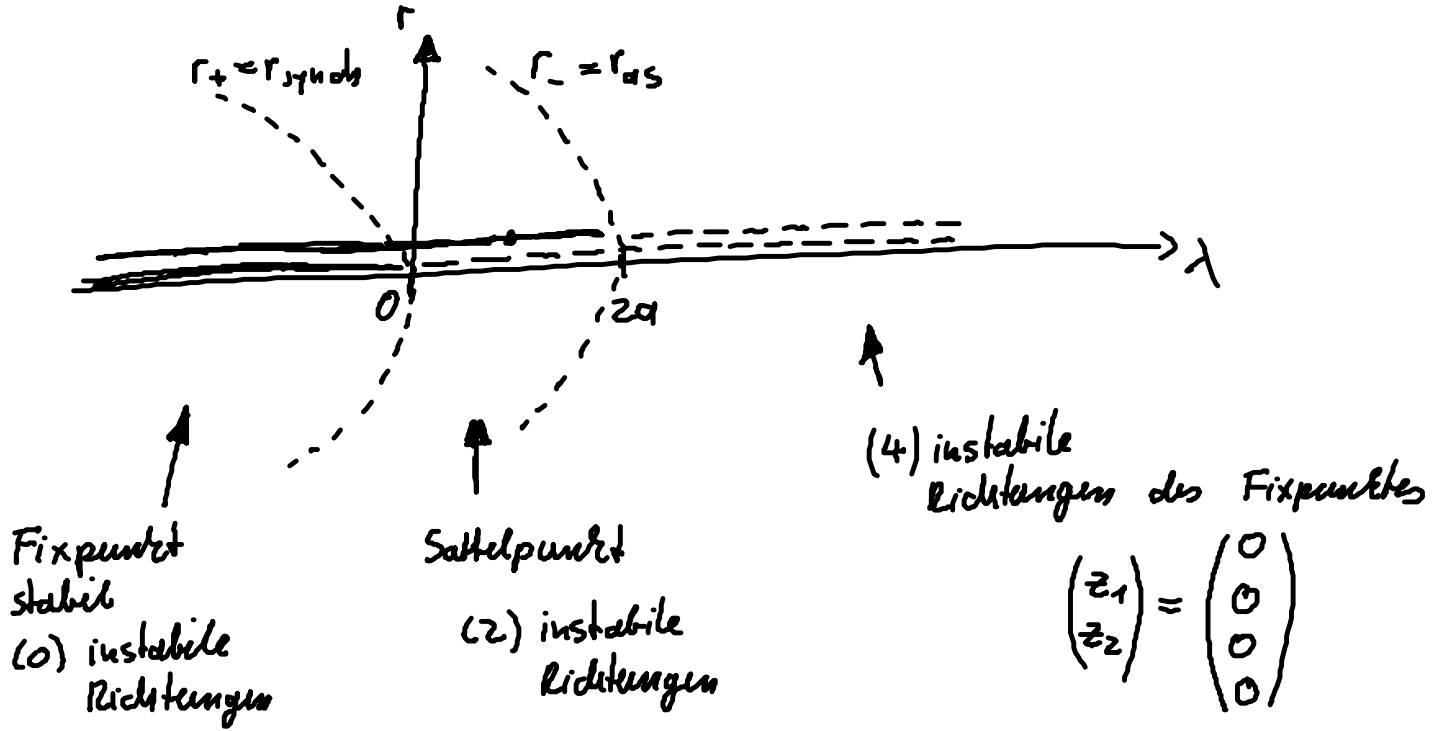
(\Rightarrow entspricht Lösung für synchron. Zustand mit $\lambda \rightarrow \lambda - 2\alpha$)

$$z_{as} = z_- = r_- \exp\left(\frac{2\pi i}{\rho_-} t\right)$$

$$r_- = \sqrt{-(\lambda - 2\alpha)}$$

$$\rho_- = \frac{2\pi}{1 + r_-^2 \gamma} = \frac{2\pi}{1 - (\lambda - 2\alpha) \gamma}$$

Fazit: Gegenphasiger Orbit verschwindet in einer Hopf Bifurkation bei $\lambda = 2\alpha$



Wunsch: Stabilisierung der periodischen Orbits
 Möglichkeit: zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

REVIEW

Delay stabilization of periodic orbits in coupled oscillator systems

BY B. FIEDLER¹, V. FLUNKERT², P. HÖVEL^{2,*} AND E. SCHÖLL²¹*Institut für Mathematik I, Free Universität Berlin, Arnimallee 2-6,
14195 Berlin, Germany*²*Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin,
Hardenbergstraße 36, 10623 Berlin, Germany*

We study diffusively coupled oscillators in Hopf normal form. By introducing a non-invasive delay coupling, we are able to stabilize the inherently unstable anti-phase orbits. For the super- and subcritical cases, we state a condition on the oscillator's nonlinearity that is necessary and sufficient to find coupling parameters for successful stabilization. We prove these conditions and review previous results on the stabilization of odd-number orbits by time-delayed feedback. Finally, we illustrate the results with numerical simulations.