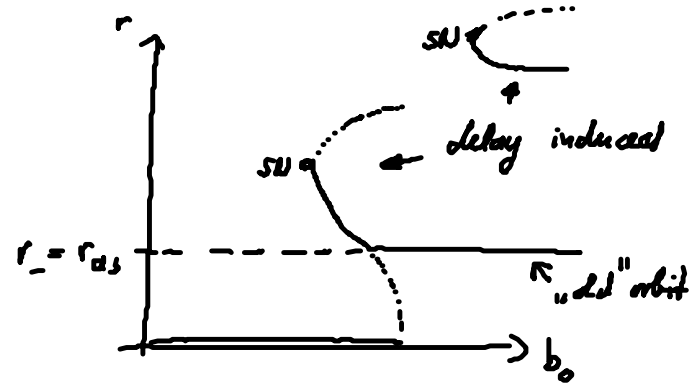


English Summary

4.3. Stabilization of LC oscillations in a system of 2 Hopf-Normal-forms

- antiphase orbit stabilized with $\tau = \frac{p}{2}$
- feedback induces new "delay induced" orbits that are born in saddle node bifurcations



- stabilization was possible with complex feedback strength

4.4. Networks

4.4.1. Characterization of network topology

Adjacency matrix \underline{A} : example

$\rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

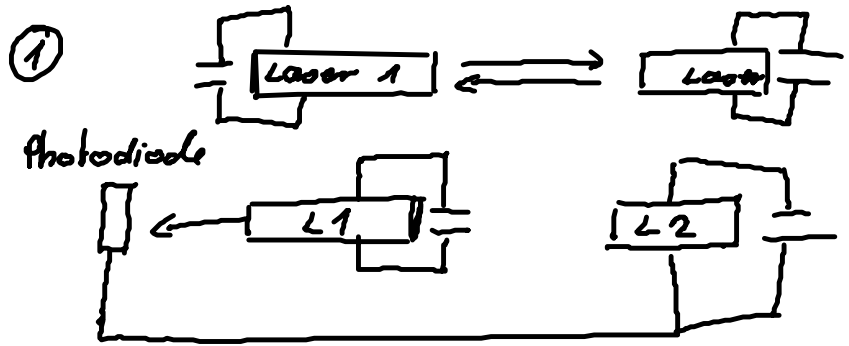
4.4.2 Kopplungschema

- Kopplungschema \underline{H} gibt an wie die Elemente untereinander gekoppelt sind, d.h. wie OGL's aussehen

Bsp. Laser 2 dynamische Variablen \rightarrow Ladungsträger OGL I
 \rightarrow Licht OGL II

① opt. Kopplung nur Kopplungsterm in OGL II

② elektro-optische Kopplung: Kopplungsterm in OGL I aber abhängig von OGL II



Bsp. 2 Hopf Normalformen

$$\underline{H}_{12} = \begin{pmatrix} \text{Re} z_1 & \text{Im} z_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \text{Re} z_2 & \text{Im} z_2 \end{pmatrix} \underline{z} = \begin{pmatrix} \text{Re} z \\ \text{Im} z \end{pmatrix}$$

aus 4.3.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dots + \alpha(z_1 - z_2) \\ \dot{z}_2 = \dots + \alpha(z_2 - z_1) \end{cases}$$

⇒ Das Differentialgleichungssystem aller Elemente hat die Form

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i(\underline{x}_i(t)) + \sigma \sum_j^N a_{ij} \underbrace{\underline{H}}_{\text{Kopplungsschema}} \underline{x}_j$$

adjacency matrix
↓
N Zahl der Elemente

↑
lokale Dynamik
z.B. Hopf NF oder
Laser Gleichungen

• direkte Kopplung (pseudo diffusive)

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i[\underline{x}_i] + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H} \underline{x}_j(t - \tau_{ij})$$

(z.B. Laser + Spiegel)

• diffusive Kopplung

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i[\underline{x}_i] + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H} [\underline{x}_j(t - \tau_{ij}) - \underline{x}_i(t)]$$

Bsp. Neuronenkopplung

Bemerkung: beides ineinander umformbar
durch

$$\tilde{\underline{F}}_i = \underline{F}_i - \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} \underline{H} \underline{x}_i(t)$$

4.4.3. Voraussetzungen für stabile Synchronisierung aller Elemente

Annahmen

$\underline{F}_i = \underline{F}$ alle gleiche lok. Dynamik

$\tau_{ij} = \tau$ alle gleiche Signallaufzeiten

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = \text{const} \quad \forall i$$

alle Elemente bekommen im Fall der Synchronisierung den gleichen Eingang o.B.d.A. $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$

Konstante Zeilensumme

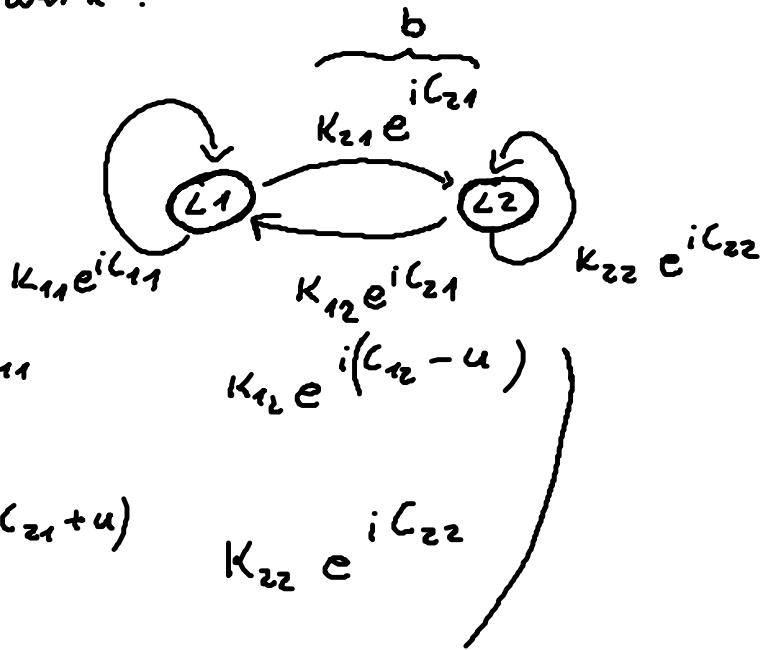
$\underline{H}_{ij} = \underline{H}$ identische Kopplungsschemata aller Elemente untereinander

Dynamik auf der synchronen Mannigfaltigkeit

$$\dot{\underline{x}}_s = \underline{F}(\underline{x}_s(t)) + \sigma \underline{H} \underline{x}_s(t - \tau)$$

Frage: Was bedeutet Bedingung konstanter Zeilensumme für das Netzwerk?

adjacency + Kopplung



Kopplung $\underline{G} = \begin{pmatrix} k_{11} e^{iC_{11}} & k_{12} e^{i(C_{12} - u)} \\ k_{21} e^{i(C_{21} + u)} & k_{22} e^{iC_{22}} \end{pmatrix}$

Laser: E_1 elektrisches Feld
 $|E_1|^2$ Intensität

Laser synchron wenn: $E_1 = E_2$ oder
 $E_1 = E_2 e^{iu}$

$\tilde{E}_1 \rightarrow E_1 e^{iu}$

Konstante Zeilensumme:

$$k_{11} e^{iC_{11}} + k_{12} e^{i(C_{12} - u)} = k_{22} e^{iC_{22}} + k_{21} e^{i(C_{21} + u)}$$

Bsp.



$\Rightarrow k_{11} e^{iC_{11}} = k_{21} e^{i(C_{21} + u)}$

Synchronisierung nur möglich wenn $k_{11} = k_{21}$

$u = C_{11} - C_{21}$

synchron

Ist die Lösung stabil?

Methode: Master stability function \rightarrow 4.5

4.4.4. Netzwerke aus Hopf-Normalformen

- N gekoppelte Hopf-NF ($\omega=1$)

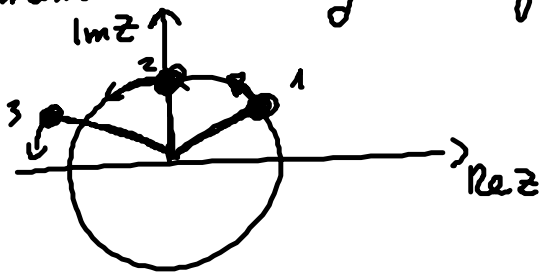
$$\dot{z}_j = \left(\lambda + i + (1 + i\gamma) |z_j|^2 \right) z_j + \sigma \sum_{n=1}^N a_{jn} (z_n(t-\tau) - z_j(t))$$

$\omega=1$ \uparrow
 superkritisch

Kopplungsstärke $\sigma = K e^{i\beta} \in \mathbb{C}$
 Adjacency matrix \underline{A}
 Oszillatoren $z_i = r_i e^{i\varphi_i}$

Invariante Zustände (stationär)

Veranschaulichung der Dynamik in komplexer Ebene



wir suchen $\dot{r}_j = 0$
 $\dot{\varphi} = \Omega_m$ (konstant)

Annahme: gleiche Amplitude aller Oszillatoren
 gleiche konstante Winkelgeschw.

$$r_j = r_{s,m}$$

$$\varphi_j = \Omega_m t + j \frac{2\pi m}{N}$$

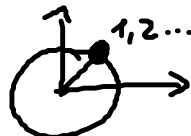
Index m : klassifiziert Zustände

$m=0$: Synchroner Zustand

$$r_i = r_{s,0}$$

$$\varphi_i = \Omega_0 t$$

(in-phases Lösung)

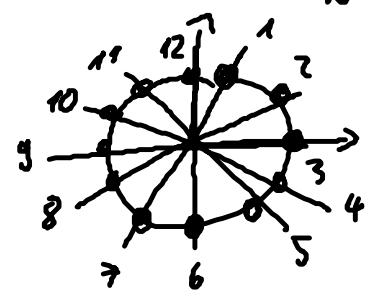


N=12

m = 1 : Splay Zustand

$$r_j = r_{s,1}$$

$$\varphi_j = \Omega_1 t + j \frac{2\pi}{N}$$

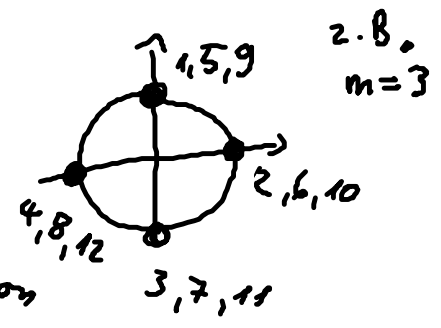


• jeder Oszillator hat andere Phase aber gleichem Abstand zum Nachbarn

m > 1 | Cluster Zustand

Innerhalb eines Clusters

z.B. 1, 5, 9 : in-phase Synchronisation



Bemerkung: für N=2

Splay Zustand $\hat{=}$ gegenphasiger Lösung $z_1 + z_2 = 0$

Bestimmung der Lösungen für r_j, φ_j durch Einsetzen in gekoppelte

DGL:

$$\sum_n a_{jn} = 1$$

$$\left[\begin{aligned} r_{s,m}^2 &= - \left[\lambda - \sum_n a_{jn} K \cos \beta + K \sum_{n=1}^N a_{jn} \cos \Omega \right] \\ \Omega &= \beta - \Omega_m \tau + (n-j) \frac{2\pi m}{N} \\ \Omega_m &= 1 + \gamma r_{s,m}^2 - \sum_n a_{jn} K \sin \beta + K \sum_n a_{jn} \sin \Omega \end{aligned} \right]$$

$$\sigma = K e^{i\beta}$$

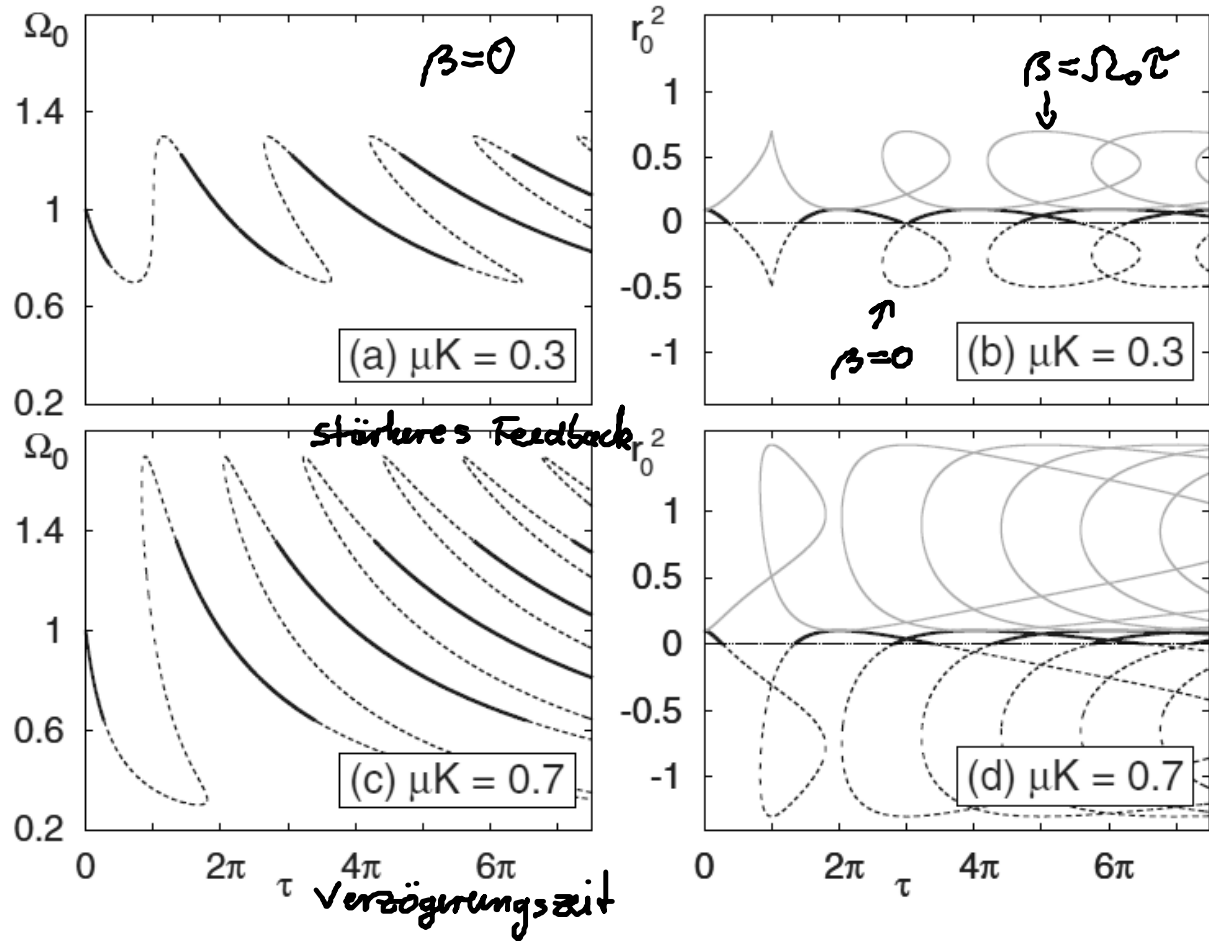


FIG. 1. (Color online) Collective frequency Ω_0 (left) and squared amplitude r_0^2 (right) of in-phase oscillation ($m=0$) vs time delay τ for different amplitude of the feedback strength [$\mu K=0.3$ and 0.7 in (a), (b) and (c), (d), respectively]. Black (blue) and gray (yellow) curves correspond to a feedback phase $\beta=0$ and $\beta=\Omega_0\tau$, respectively. Unphysical solutions ($r_0^2 < 0$) are dashed. For $\beta=\Omega_0\tau$ the curves in (a) and (c) have the same shape, but no unphysical solutions occur. Parameters: $\lambda=0.1$, $\omega=1$, and $\gamma=0$.

↗
Synchronisierte Lösung

Referenz: 2009 Phys. Rev. Lett
Choe et al.

Stabilität der Lösungen:

- Stabilität aller Störungen senkrecht zyklischer Mannigfaltigkeit ($N-1$) Richtungen (senkrechte Richtungen)
- Lyapunov Exponent berechnen

Probleme : • Richtungen bestimmen

• Rechnung für jede Topologie wiederholen

⇒ Effektiver mit
Master stability function