

# English Summary

## 4.4.2. Coupling Schemes

- Matrix  $\underline{H}$  : describes how the variables of a local node are coupled

(example: diagonal coupling  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  of Hopf normal form)

- Topology of network given by adjacency matrix  $\underline{A}$   
- for weighted connections: matrix  $\underline{G}$

- Conditions for synchronized dynamics  
- constant row sum  $\sum_{j=1}^N G_{ij} = \text{const} = 1$

Dynamics of  $N$  coupled Hopf NF

$$\dot{z}_j = (\lambda + i + (1 + i\mu) |z_j|^2) z_j + \sigma \sum_{n=1}^N G_{jn} (z_n(t-\tau) - z_j(t))$$

## 4.5. Master Stability Function

- Bestimmung der Stabilität der synchronen Lösungen

Netzwerk / gekoppeltes System

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \sigma \sum_j G_{ij} \underline{H} x_j$$

## Topologie des Netzwerks

Eigenwerte der Kopplungsmatrix  $\underline{G}: \nu_k$

## lokale Dynamik

- betrachte Abweichung  $\underline{\delta x}$  vom  
synchronen Zustand  $\underline{x}_s$

$$\underline{\delta x}_i = \underline{x}_i - \underline{x}_s$$

- und untersuche Lyapunov-Exp  
der Lösung von

$$\dot{\underline{\delta x}} = Df|_{\underline{x}_s} \underline{\delta x} + \nu \underline{H} \underline{\delta x} \text{ als}$$

Funktion von  $\nu$   
→ also suche  $\Lambda(\nu)$

Beweis  
gleich

Dim: 2 (Phasenraumdimension eines Knotens)  
statt  $2N$

Stabilität der synchronen Lösung in der  
stab. Mannigfaltigkeit gegeben durch  
größten Lyapunov Exponent

$\Lambda(\nu) \hat{=}$  Master Stability Function (MSF)

Literatur:

L.M. Pecora, T.L. Carroll  
PRL 80, 2103 (1998)

Vorteil: Wenn  $\Lambda(\nu)$  einmal bekannt → kann leicht  
Einfluss der Topologie untersucht werden

d.h.: Topologie & lokale Dynamik  
separat zu diskutieren

Bem: MSF ist eine Funktion von  $\sigma, \nu,$  und  $\tau$   
 $\uparrow$  da Df an synchr. Lösung ausgewertet wird

PHYSICAL REVIEW E 81, 025205(R) (2010)

**Controlling synchrony by delay coupling in networks: From in-phase to splay and cluster states**

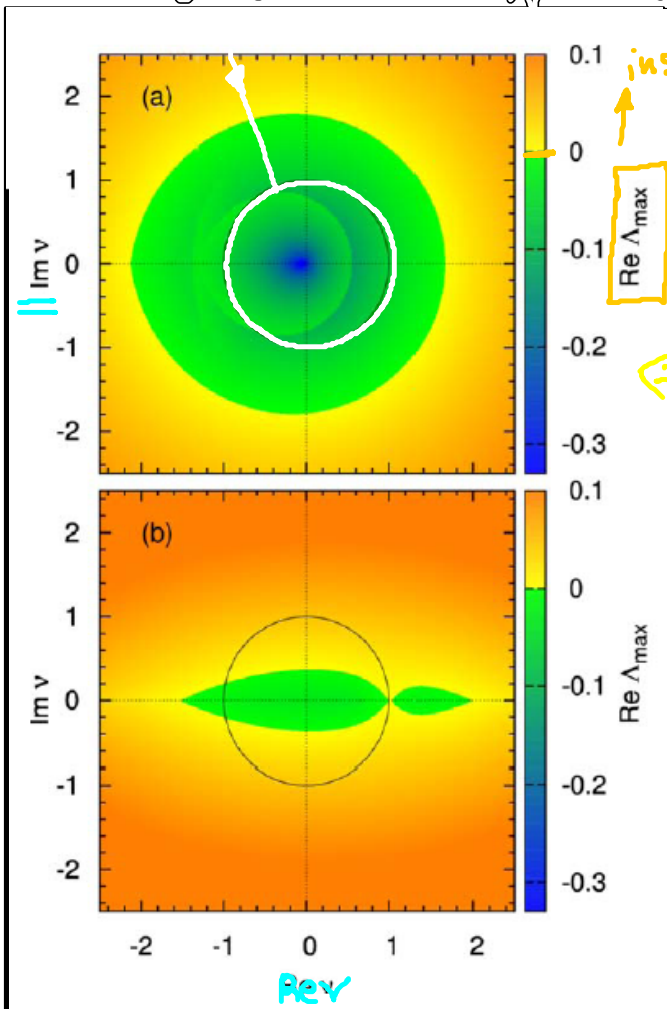
Chol-Ung Choe,<sup>1,2</sup> Thomas Dahms,<sup>1</sup> Philipp Hövel,<sup>1</sup> and Eckehard Schöll<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin, 10623 Berlin, Germany  
<sup>2</sup>Department of Physics, University of Science, Unjong-District, Pyongyang, Democratic People's Republic Korea  
 (Received 8 August 2009; revised manuscript received 15 December 2009; published 25 February 2010)

We study synchronization in delay-coupled oscillator networks using a master stability function approach. Within a generic model of Stuart-Landau oscillators (normal form of supercritical or subcritical Hopf bifurcation), we derive analytical stability conditions and demonstrate that by tuning the coupling phase one can easily control the stability of synchronous periodic states. We propose the coupling phase as a crucial control parameter to switch between in-phase synchronization or desynchronization for general network topologies or between in-phase, cluster, or splay states in unidirectional rings. Our results are robust even for slightly nonidentical elements of the network.

DOI: 10.1103/PhysRevE.81.025205      PACS number(s): 05.45.Xt, 02.30.Ks, 05.45.Gg, 89.75.-k

Eigenwerte der N-Hopf-NF wenn  $G$  ein unidirektionaler Ring



$Im \nu$   
 $\uparrow$   
 Eigenwert  
 von  $G$

instabil

Farbkele  
 $Re(\lambda_{max})$

$K=0.3 = \sigma$  Kopplungsstärke  
 $\tau=2\pi$

$K=0.08 = \sigma$

$\tau=0.52\pi$

$v_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$   
 (auf Einheitskreis)

$\Rightarrow$  Für  $\tau = 2T$  kann synchrone Lösung stabilisiert werden (Einheitskreis liegt in Region wo  $\lambda(v) < 0$ )

Für  $\tau = 0.52T$  ist synchrone Lösung instabil.

### 4.5.1. Herleitung der MSF also Master Stability Function

Startpunkt:  $\underline{\dot{x}}_i = \underline{F}(x_i) + \sigma \sum_n^N G_{jn} \underline{H} \cdot \underline{x}_j(t - \tau)$   
 $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$

Zusammenführen zu einer Gleichung  $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

$$\underline{\hat{F}}(\underline{X}) = (\underline{F}(x_1), \underline{F}(x_2) \dots \underline{F}(x_N))$$

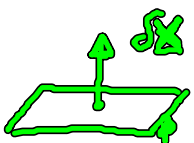
liefert:

$$\underline{\dot{X}} = \underline{\hat{F}}(\underline{X}(t)) + \sigma \left[ \underline{G} \otimes \underline{H} \right] \underline{X}(t - \tau)$$

$N \times N$  Matrix

$m \times m$  Matrix

$m$ : Dim. des lok. Phasenraum



synchr. Mannigfaltigkeit

Abweichung vom synchronen Zustand

$$\underline{X} = \underline{X}_s + \delta \underline{X}$$

$$(III) \delta \underline{\dot{X}} = D\hat{F}|_{\underline{X}_s(t)} \delta \underline{X}(t) + \sigma \left[ \underline{G} \otimes \underline{H} \right] \delta \underline{X}(t - \tau)$$

es gilt  $D\hat{F}|_{\underline{X}_s} = \underline{1}_N \otimes DF|_{\underline{x}_s}$

(auf  $x_3$  sind alle Knoten identisch)

• Annahme: Es gibt eine Transformation  $\underline{S}$  so dass

$$\text{diag } \underline{G} = \underline{S}^{-1} \underline{G} \underline{S}$$

↑  
diagonalisierte Kopplungsmatrix

• multiplizierte (III) mit  $\underline{S}^{-1} \otimes 1_m$

$$\Rightarrow (s^{-1} \otimes 1_m) \delta \dot{X} = (1_n \otimes DF) \Big|_{X_s(t)} (s^{-1} \otimes 1_m) \delta X(t)$$

$$+ \sigma (s^{-1} G \otimes H) \delta X(t-z)$$



$$\underline{S} \underline{S}^{-1} = \underline{I} \quad \text{einsetzen}$$

$$H = H 1_m$$



$$\Rightarrow \sigma (s^{-1} G S \otimes H) (s^{-1} \otimes 1_m)$$

transformierte Abweichung von  $X_s$  in  
Diagonalbasis von  $\underline{G}$  d.h.

$$\delta \tilde{X} = (s^{-1} \otimes 1_m) \delta X$$

$$\Rightarrow \delta \dot{\tilde{X}} = (1_n \otimes DF) \Big|_{X_s(t)} \delta \tilde{X}(t) + \sigma (\text{diag } G \otimes H) \delta \tilde{X}(t-z)$$

• dies ist eine Gleichung in Block-Diagonalform  
 $\Rightarrow$  Aufspaltung in einzelne Blöcke (auf der Diagonalen)

$$\text{(IV)} \quad \dot{\delta \underline{x}}_k = DF|_{x_s(t)} \delta \underline{x}(t) + \sigma \underline{v}_k \int \delta \underline{x}_k(t - \tau)$$

$\underline{v}_k$ : Eigenwertspektrum

Lösungen von (IV) beschreiben wie sich Abweichungen aus der synchr. Mannigfaltigkeit mit der Zeit entwickeln.

• Konzept des Lyapunov Exponenten:  $|\delta x(t)| = e^{\Lambda t} |\delta x_0|$

• Bestimmung von  $\Lambda$  erfolgt numerisch

• falls  $\sum_n G_{in} = 1$  enthält Eigenwertspektrum von  $\underline{G}$  immer den Wert  $\underline{v}_k = 1$

der zugehörige Eigenvektor von  $\underline{G}$  zeigt in Richtung von  $\underline{x}_s$  und ist nicht wichtig für transversale Stabilität

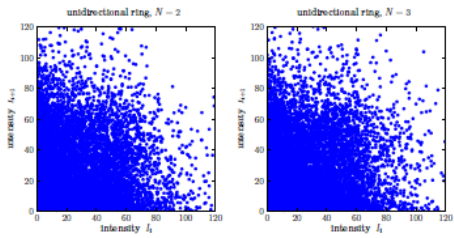
$\Rightarrow$  Lösung von (IV) zu  $\underline{v}_k = 1$  ergibt Dynamik in der synchronen Mannigfaltigkeit.

Bsp. Laser - Netzwerke

## Unidirectional ring without feedback

$$\gamma_k = e^{2\pi i k / N}, \quad k = 0 \dots N - 1$$

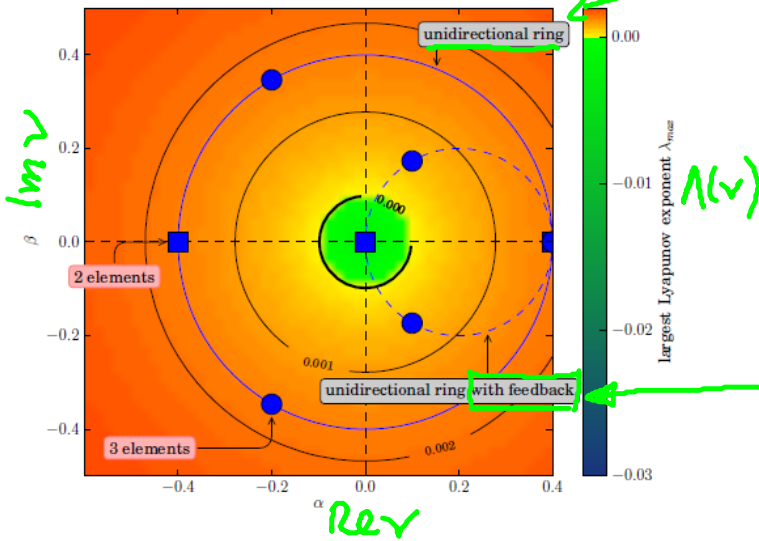
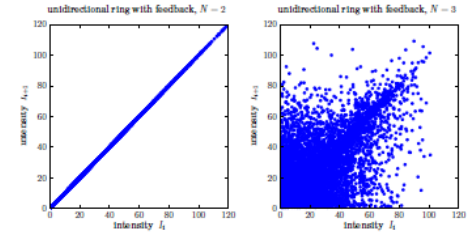
$$g = 1$$



## Unidirectional ring with feedback

$$\gamma_k = 1 + e^{2\pi i k / N}, \quad k = 0 \dots N - 1$$

$$g = 2$$



- ▶ Without self-feedback, the synchronization is unstable for any number of network elements  $N$ .
- ▶ Self-feedback shrinks and shifts the ring of eigenvalues.
- ▶ Self-feedback stabilizes  $N = 2$ , but  $N \geq 3$  cannot be stabilized.