Summary - Network dynamis

- Stability of synchronized solutions can be determined by Master - Stability - Function (MSF)

- MSF results from linear stability analysis along the eigenvectors of adjacency matrix $\underline{\underline{A}}$ (coupling matrix $\underline{\underline{G}}$) $\Rightarrow \Lambda(\nu)$ ← Lyapunov Exp.

$\Rightarrow$ Topology and local dynamics can be separated

Topology ← Eigenvalue spectra ν_k of $\underline{\underline{G}}$

local dynamics ← coupling scheme $\underline{\underline{H}}$

$$\delta \dot{\underline{\tilde{x}}}_k = DF\big|_{X_1(t)} \delta \tilde{x}_k(t) + \sigma \nu_k H \delta \tilde{x}_k(t-\tau)$$

5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen

Bisher: deterministische dynam. Systeme

jetzt: stochastische dynam. Systeme (z.B. Rauschen durch spontane Emission im Laser)

5.1. Rauschinduzierte Oszillationen und Kohärenzresonanz

Stochast. Prozess

Zeitentwicklung einer Zufallsvariable $X(t)$

($\longleftrightarrow$ im thermodyn. Gleichgewicht zeitunabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Jaynes'sches Prinzip der vorurteilsfreien Schätzung
geg.: verallgemeinerte kanonische Verteilung
$$p_i = Z^{-1} e^{-\lambda_\nu M_i^\nu}$$
M_i^ν : Zufallsvariablen)

Verbundwahrscheinlichkeit zeitabhängig

$$p(x_1 t_1, x_2 t_2, \dots x_n t_n)$$

Realisierungen $x_1, x_2, x_3 \dots$ von $X(t)$

Markoff-Prozesse

$$p(x_1 t_1 \mid x_2 t_2, x_3 t_3 \dots\dots) := \frac{p(x_1 t_1, x_2 t_2, \dots\dots)}{p(x_2 t_2, \dots\dots)}$$

$\nearrow$
bedingte Wahrscheinl.

$$\stackrel{!}{=} p(x_1 t_1 \mid x_2 t_2)$$

hängt nur von der jüngsten Bedingung ab

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \dots\dots$$

kein Gedächtnis!

Langevin - Gleichung

fluktuierende stochastische Kraft $\xi(t)$ (Rauschen, noise)

z. B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = \underbrace{-\eta\dot{x}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\xi(t)}_{\text{Rauschen}}$$

Gauß'sches weißes Rauschen

$\langle \ldots \rangle$ = statistische Mittelung

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t') \qquad \text{unkorreliert}$$

zentraler Grenzwertsatz: unkorreliert Zufallsvariablen gehorchen einer Gaußverteilung

Autokorrelationsfunktion

$$\Psi(s) := \Big\langle \big(x(t) - \langle x \rangle\big) \big(x(t+s) - \langle x \rangle\big) \Big\rangle$$

ergod. Systeme: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\Psi(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, x(t)\,x(t+s) \qquad (\text{wenn } \langle x \rangle = 0)$$

- **Fourier-Trafo**: $\hat{x}(\omega, T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} dt\, e^{i\omega t}\, x(t)$ in $t \in [-T, T]$

- <u>Spektrale Leistungsdichte</u> (power spectral density):

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega, T)|^2$$

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)\,x(t+s)\rangle\, e^{i\omega s}\, ds}$$

Wiener-Khinchin-Theorem

gauß'sches weißes Rauschen $\xi(t)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)\, e^{i\omega s}\, ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$

Rauschinduzierte Oszillationen

1. Bsp   System knapp unterhalb einer Hopf-Bif.

<u>Van der Pol-Oszillator</u>   (1926 el. Stromkreis)

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi$$

D Rauschintensität

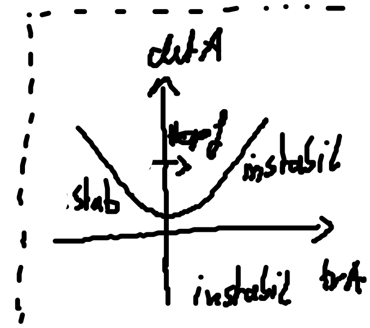
$\xi(t)$ Gauß. weißes Rauschen

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\varepsilon - x^2)\, y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \end{aligned}}$$

$D=0$: Fixpunkte: $x = y = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr} A = \varepsilon$

$\det A = \omega_0^2$



$\varepsilon = 0$ Hopf Bifurkation

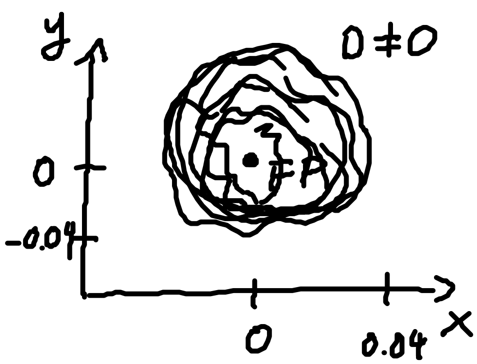
$\varepsilon < 0$ stab. Fokus

$\varepsilon > 0$ instab. Fokus + LC

wähle $\varepsilon = -0.01$, $\omega_0 = 1$

$\Rightarrow$ keine deterministischen Oszillationen

aber mit $D \neq 0$ existieren rauschinduzierte Osz.



2. Bsp : anregbares System

FitzHugh – Nagumo – Modell (Neuron)

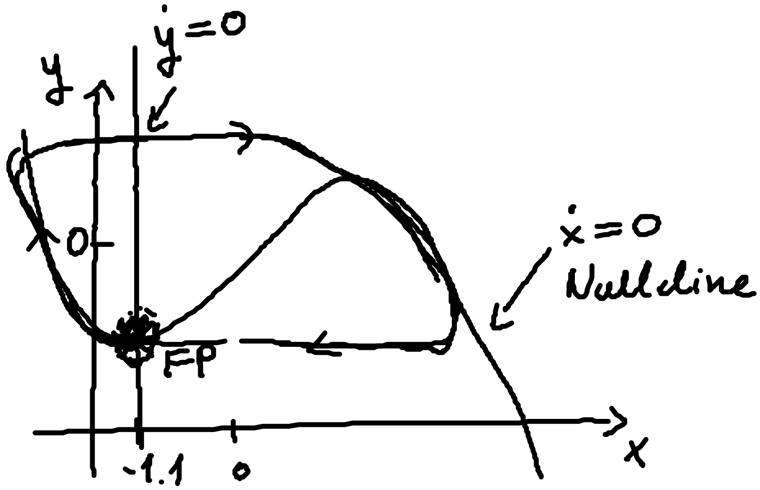
$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a \qquad + D\xi(t) \end{aligned}}$$

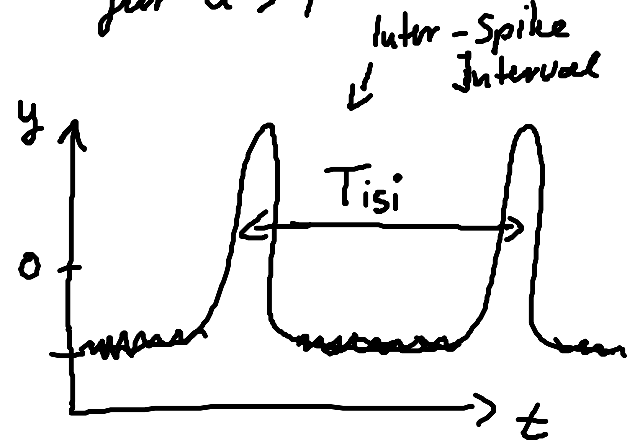
Zeitskalenparameter $\varepsilon \ll 1$ $(\varepsilon = 0.01)$

Anregungsschwelle a $(a = 1.1)$

$D = 0$: Fixpunkt:
$$x = -a$$
$$y = -a + \frac{a^3}{3}$$

• stabiler Knoten für $a > 1$





$D \neq 0$ rauschinduzierte Oszillationen (spiking von Neuronen)

Kohärenzresonanz

(Pikowsky, Kurths: PRL 78, 775 (1997))

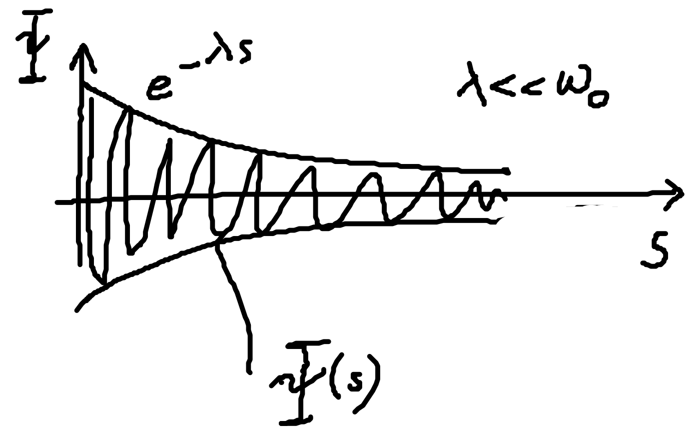
• konstruktiver Einfluss von Rauschen
  • Regularität („Kohärenz") der rauschinduzierten Osz. am größten für endliche Rauschstärke D_{opt}

  • Maß für Regularität

    Korrelationszeit $t_{cor} = \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^\infty |\Psi(s)|\, ds$

(für $\underline{\text{lin.}}$ stochastischer Prozess

$$\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + \xi \quad \Rightarrow \quad \Psi(s) = \Psi(0)\, e^{-\lambda s} \cos\omega_0 s$$



$$t_{cor} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \, |\cos\omega_0 s| \, ds$$

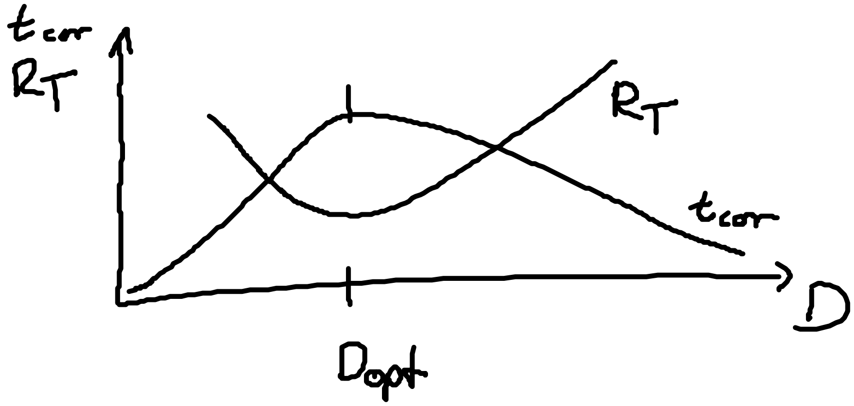
$$\text{Approx.: } \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\phi \, d\phi = \frac{2}{\pi} \quad \text{Füllfaktor für } \lambda \ll \omega_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_{cor}}} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \, ds = \underline{\underline{\frac{2}{\pi\lambda}}}$$

$$\Rightarrow \Psi(s) = \Psi(0)\, e^{-\frac{2}{\pi}\frac{s}{t_{cor}}} \cos\omega_0 s$$

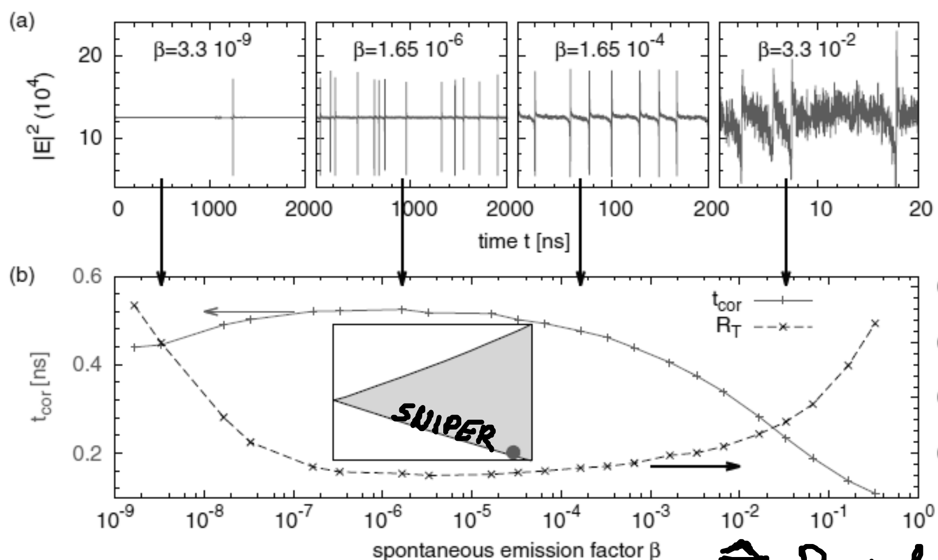
exponentiell abklingende Funktion)

Im Fall von <u>Kohärenzresonanz</u>



R_T: Breite der Verteilung der T_{isi}

$$R_T = \frac{\sqrt{\langle T_{isi}^2 \rangle - \langle T_{isi} \rangle^2}}{\langle T_{isi} \rangle}$$



← Zeitserien

Interspike Verteilung

≙ Rauschstärke

Fig. 4: (Colour on-line) Coherence resonance: (a) time series of the intensity $|E|^2$ of noise-induced spiking for various values of β inside the locking regime. (b) t_{cor} (red crosses) and R_T (black squares) *vs.* noise intensity β. Parameters: $\Delta\nu_{inj} = -1.630295\,\mathrm{GHz}$ and $K = 0.2$ (marked by the red dot in the inset of the parameter plane). Parameters as in table 1.

epl A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics

July 2013

EPL, **103** (2013) 14002 www.epljournal.org
doi: 10.1209/0295-5075/103/14002

Optical injection enables coherence resonance in quantum-dot $\boxed{\text{lasers}}$

D. Ziemann, R. Aust, B. Lingnau, E. Schöll and K. Lüdge[(a)]

Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin - D-10623 Berlin, Germany, EU