

# Summary

(5.1.) Stochastic processes and their effect on the dynamics of a nonlinear system

- Gaussian white noise  $\langle f(t) \rangle = 0$

$$\langle f(t) f(t') \rangle = \delta(t - t')$$

- Wiener-Khinchin-Theorem

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\langle x(t) x(t+s) \rangle}^{\Psi(s)} e^{i\omega s} ds$$

power spectral density  $\hat{=}$  fourier transform of autocorrelation

- linear stochastic process:  $\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + f(t)$



$$\Rightarrow \Psi(s) = \Psi(0) e^{-\lambda s} \cos \omega_0 s$$

- correlation time  $t_{\text{cor}} = \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^{\infty} |\Psi(s)| ds$

---

## 5.2. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle von rauschinduzierten Oszillationen

---

Ziel: Kontrolle der Kohärenz ( $t_{\text{cor}}$ )

" " Zeitskalen ( $\langle T \rangle$  mittlere Periode)

" " Synchronisation (bei gekoppelten Systemen)

1. Van-der-Pol Osz. (lokale Osz. um Fixpunkt)  
Pyragas Kontrolle

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + K[y(t-\tau) - y(t)] + D_f(t) \end{aligned}$$

2. FitzHugh-Nagumo-System (globale Osz.)

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + K[y(t-\tau) - y(t)] + D_f(t) \end{aligned}$$

Van-der-Pol Osz.

- nichtmonotone Modulation von  $t_{cor}$  als Funktion von  $\tau$
- stückweise lineare Modulation der dominanten Periode (Peak in Star)

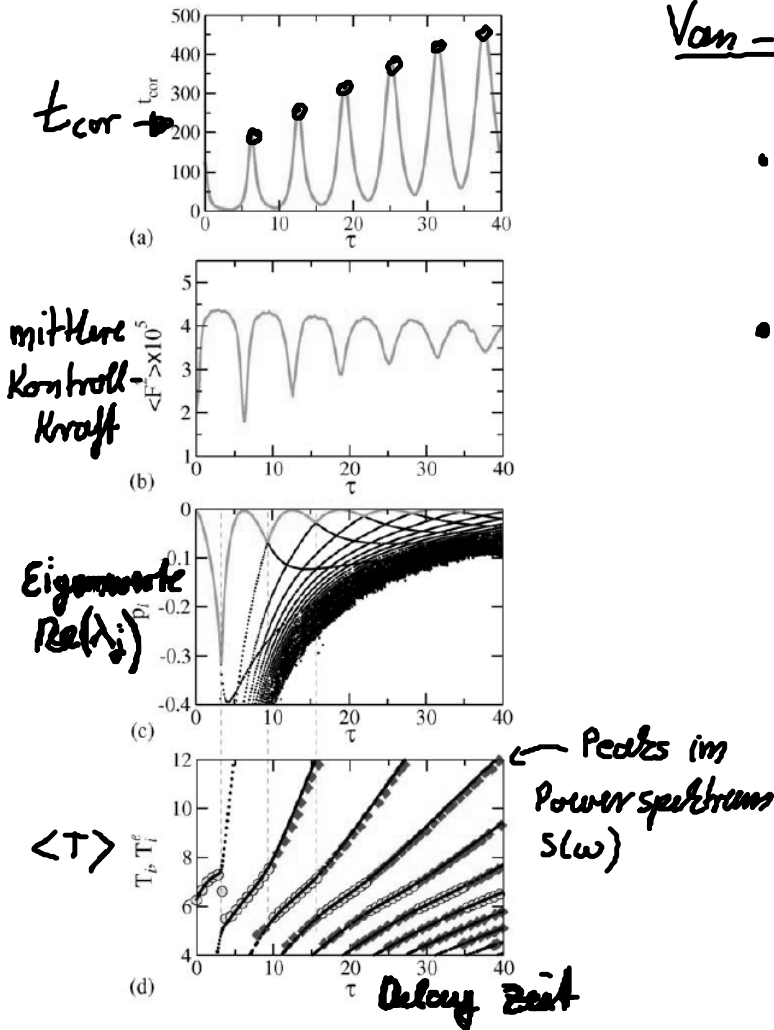


Fig. 4. (a) Correlation time  $t_{cor}$ , (b) variance  $\langle F^2 \rangle$  of control force, (c) real parts  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  of eigenvalues and (d) spectrum peak periods  $T_i$  vs.  $\tau$  at  $D = 0.003$  and  $K = 0.2$ . In (c) the largest of  $p_i$ 's, i.e.  $p_1$ , is marked by grey. In (d) light-grey circles: basic period  $T_1$ , grey diamonds:  $T_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ , black dots: eigenperiods  $T_i^e = 2\pi/|q_i|$ ,  $i = 1, 2, \dots$

5.2.1. Erklärung durch Eigenmoden des stabilen Fixpunktes im Van-der-Pol System

linearisierte Gl. um  $x=0, y=0$  ( $D=0$ )

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x} + \omega_0^2 x - K(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 - \lambda \varepsilon + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tau} - 1) = 0} \quad \text{charakt. Gleichung}$$

keine delay-induzierte Hopf-Bifurkation ( $\lambda = iq$ ), denn

$$\text{Re: } -q^2 + \omega_0^2 - Kq \sin q\tau = 0 \quad (1)$$

$$\text{Im: } \underbrace{-\cancel{q}\varepsilon}_{< 0} + K\cancel{q}(1 - \cos q\tau) = 0 \quad (2) \Rightarrow \underbrace{\cos q\tau}_{\leq 1} = \frac{K + |\varepsilon|}{K} > 1$$



Ursprung der Peaks in  $S(\omega)$ ?

Eigenwerte  $\lambda = p + iq$

• Oszill. Verhalten von  $\text{Re}\lambda$  als Fkt. von  $\tau$

Moden überkreuzen sich:  $T_1^e = \frac{2\pi}{|q_1|}$  springt



Eigenperiode des Fixpunktes



dominante Periode der Osz.

langsamste Mode  
( $|p|$  am kleinsten)

dominiert die Dynamik  
Kohärenz am größten wenn  
 $|p|$  am kleinsten ist

$\hat{=}$  am wenigsten stabile Moden

können am leichtesten durch Rauschen  
destabilisiert werden

$$\Rightarrow p \neq 0 \text{ und } |\varepsilon| \ll K$$

$$(2) \Rightarrow \cos q\tau \approx 1$$

$$\Rightarrow q\tau \approx 2\pi n, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow T_1^e = \frac{2\pi}{|q_1|} \approx \frac{\tau}{n}$$

$T_1^e$  stückweise linear  
in  $\tau$

• Max. von  $\rho_1(\tau)$  (Maximum der Kohärenz)

$$\rho_1 \neq 0, \quad \varphi = \frac{2\pi n}{\tau} \Rightarrow \varphi^2 = \omega_0^2$$

$$\tau = 2\pi \frac{n}{\omega_0} = nT_0$$

$T_0$  Periode des Fixpunktes ohne Störung

wenn  $\tau = nT_0 \Rightarrow$  Maximum von  $t_{\text{osc}}$

## 5.2.2. Spektrale Eigenschaften - Mean-field Näherung

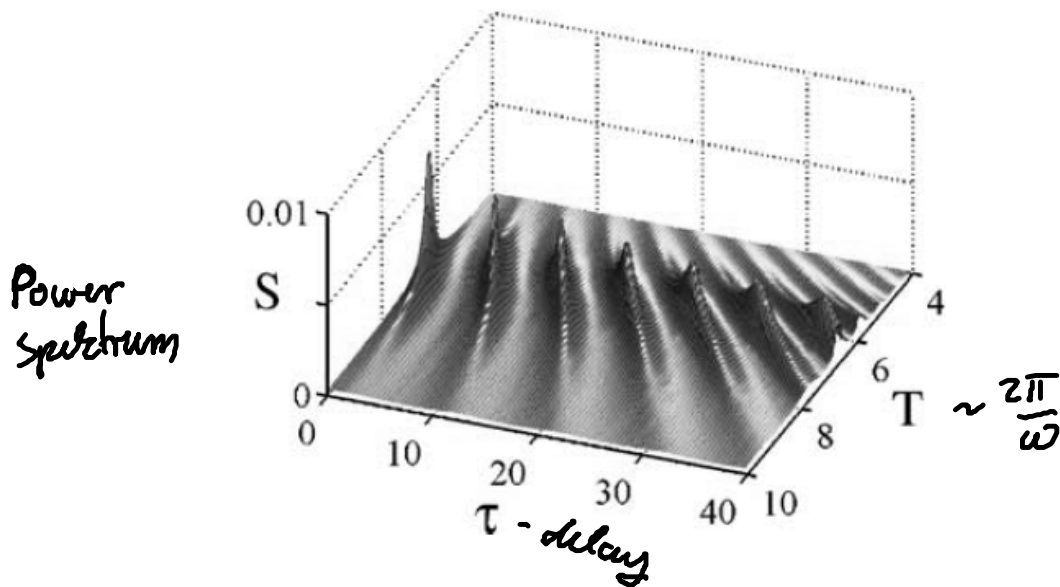


Fig. 3. Spectra of noise-induced oscillations in the Van der Pol system in the presence of delayed feedback for a range of  $\tau$  at  $D = 0.003$ ,  $K = 0.2$ .

• Neue Maxima durch Kontrolle in  $S(\omega)$

Ziel: Analytische Theorie für  $t_{\text{osc}}$  u.  $S(\omega)$  als Funktion von  $K, \tau, D$

zunächst  $K=0$

Näherung:  $\underbrace{\epsilon - x^2}_{\uparrow \text{Dämpfung}} \approx \epsilon - \langle x^2 \rangle \equiv \tilde{\epsilon} < 0$

(gut für  $D \ll |\epsilon/\omega_0|$ )

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \tilde{\epsilon} y - \omega_0^2 x + D \xi(t) \end{cases}$$

lineare stochastische DGL mit  
Gauß'schem weißem Rauschen  
(Ornstein-Uhlenbeck Prozess)

Lit: Gardiner

$$d\underline{x}_s = -\underline{A} \underline{x}_s dt + \underline{B} d\underline{W}(t)$$

$$\underline{x}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & -\tilde{\epsilon} \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

stationären stochastischen  
Prozess ( $\langle x_s \rangle = 0$ )

$$\Rightarrow \text{Varianz-Matrix } \underline{\sigma} = \langle \underline{x}_s(t) \otimes \underline{x}_s(t) \rangle$$

$$= \frac{D^2}{-2\tilde{\epsilon}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{D^2}{-2\tilde{\epsilon} \omega_0^2} = \frac{D^2}{-2(\epsilon - \langle x^2 \rangle) \omega_0^2}$$

selbstkonsistente Lösung von  $\langle x^2 \rangle$  in Abhängigkeit von  $D$

$$\langle x^2 \rangle^2 - \epsilon \langle x^2 \rangle - \frac{D^2}{2\omega_0^2} = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\epsilon}{2} (+) \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}}$$

(+) unphysikalisch

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\varepsilon^2 \omega_0^2}} \right)$$

Dämpfung  $\hat{=}$  Abstand zur Hopf-Bifurkation  
wächst mit Rauschintensität  $D$

Autokorrelation für linearem stoch. Prozess

$$\tilde{\Psi}_{yy}(s) = \langle y(t) y(t+s) \rangle \approx \tilde{\Psi}_{yy}(0) e^{\rho s} \cos \tilde{\omega} s$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \rho \pm i\tilde{\omega} \\ &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \pm i \sqrt{-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4} + \omega_0^2} \\ &\uparrow \\ &\text{EW von } \underline{\underline{A}} \end{aligned}$$

$$t_{\text{cor}} = \frac{1}{\tilde{\Psi}_{yy}(0)} \int_0^{\infty} |\tilde{\Psi}_{yy}(s)| ds \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\rho s} ds = -\frac{2}{\pi \rho}$$

$$\boxed{t_{\text{cor}} = \frac{4}{\pi |\tilde{\varepsilon}|}} \quad \text{als Funktion von } D \quad (K=0)$$

Mit Kontrolle  $K \neq 0$

$$\lambda^2 - \tilde{\varepsilon} \lambda + \omega_0^2 - K \lambda (e^{-\lambda \tilde{\tau}} - 1) = 0 \quad (*)$$

Charakt. Gl.  
(enthält nichtlin.  
Dämpfung durch  $\tilde{\varepsilon}$ )

$$\tilde{\tau} \approx n \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \text{unendl. viele EW} \quad \lambda_j^{\tilde{\tau}} = \rho_j e + i q_j e$$

Die 2 EW  $\lambda_{1,2}^e = \delta_{\rho} \pm i(1 + \delta_q) \omega_0$  mit betragsmäßig  
kleinstem  $|\delta_{\rho}|$  sind von allen anderen EW separiert  
( $\hat{=} \tilde{\tau} \rightarrow 0$ )  
aus  $(*)$

$$\underline{\tau \approx nT_0} \quad : \quad \underline{t_{cor} = -\frac{z}{\pi \delta_p} \approx \frac{4}{\pi |\tilde{\epsilon}|} \left(1 + \frac{K\tau}{z}\right)} \quad \textcircled{x_2}$$

Herleitung siehe :

EUROPHYSICS LETTERS

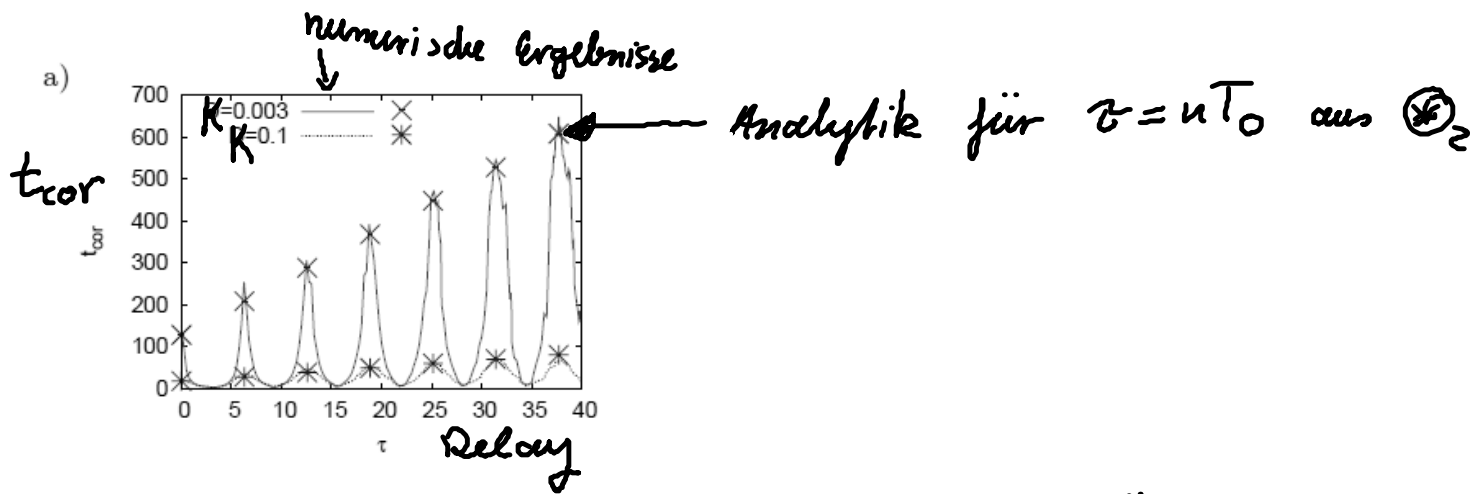
1 August 2005

*Europhys. Lett.*, 71 (3), pp. 366–372 (2005)

DOI: 10.1209/epl/i2005-10100-9

## Mean-field approximation of time-delayed feedback control of noise-induced oscillations in the Van der Pol system

J. POMPLUN, A. AMANN and E. SCHÖLL(\*)



prima Übereinstimmung von Mean-field Näherung und vollem System.

• Spektrale Leistungsdichte  $S(\omega)$

Methode : Fourier Transform der Mean-field Gl.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{x}(\omega)$$

DGL  
=>

$$-i\omega \hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega)$$

$$-i\omega \hat{y}(\omega) = \tilde{\varepsilon} \hat{y}(\omega) - \omega_0^2 \hat{x}(\omega) + D \hat{f}(\omega) + K \hat{y}(\omega) \cdot (e^{i\omega\tau} - 1)$$

Lösung möglich

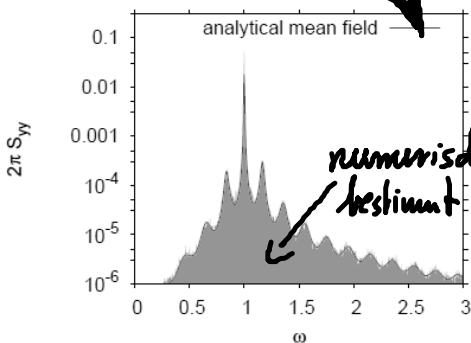
$$\hat{y}(\omega) = \frac{i\omega D \hat{f}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \tilde{\varepsilon} - i\omega K (e^{i\omega\tau} - 1)}$$

$$\rightarrow \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \dots$$

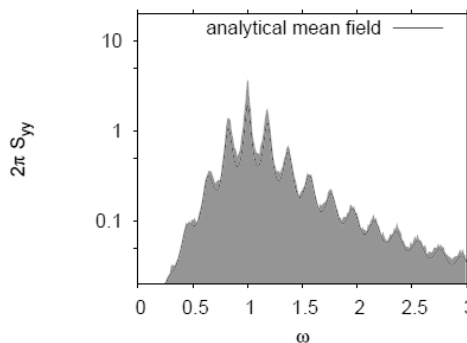
$$\rightarrow \text{Wiener - Khinchine - Theorem} \Rightarrow \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \dots = \delta(\omega - \omega') S(\omega')$$

$$\rightarrow S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_0^2 + \omega K \sin \omega \tau)^2 + \omega^2 (\tilde{\varepsilon} - K(1 - \cos \omega \tau))^2}$$

a)



b)



c)

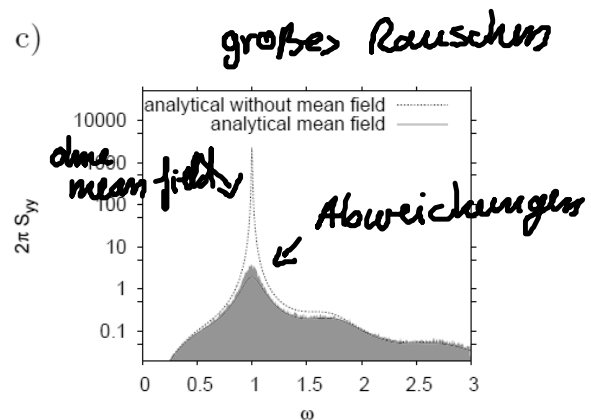


Fig. 4 - Spectrum  $S_{yy}(\omega)$  for the VdP system in the presence of delayed feedback for  $\varepsilon = -0.01$ ,  $K = 0.2$ : a)  $D = 0.003$ ,  $\tau = 31.4$ ; b)  $D = 0.5$ ,  $\tau = 31.4$ ; c)  $D = 0.5$ ,  $\tau = 6.3$ . Shaded: numerically simulated spectra; solid line: spectrum estimated analytically by (19); dashed line in c): spectrum estimated analytically without mean field ( $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ ) [14].



