

Summary

(5.1.) Stochastic processes and their effect on the dynamics of a nonlinear system

- Gaussian white noise $\langle f(t) \rangle = 0$

$$\langle f(t) f(t') \rangle = \delta(t - t')$$

- Wiener-Khinchin-Theorem $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\langle x(t) x(t+s) \rangle}^{\Psi(s)} e^{i\omega s} ds$

power spectral density $\hat{=}$ fourier transform of autocorrelation

- linear stochastic process: $\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + f(t)$



$$\Rightarrow \Psi(s) = \Psi(0) e^{-\lambda s} \cos \omega_0 s$$

- correlation time $t_{\text{cor}} = \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^{\infty} |\Psi(s)| ds$

5.2. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle von rauschinduzierten Oszillationen

- Ziel: Kontrolle der Kohärenz (t_{cor})
- " " Zeitknoten ($\langle T \rangle$ mittlere Periode)
 - " " Synchronisation (bei gekoppelten Systemen)

1. Van - der - Pol Osz. (lokale Osz. um Fixpunkt)

Pyragas Kontrolle
↓

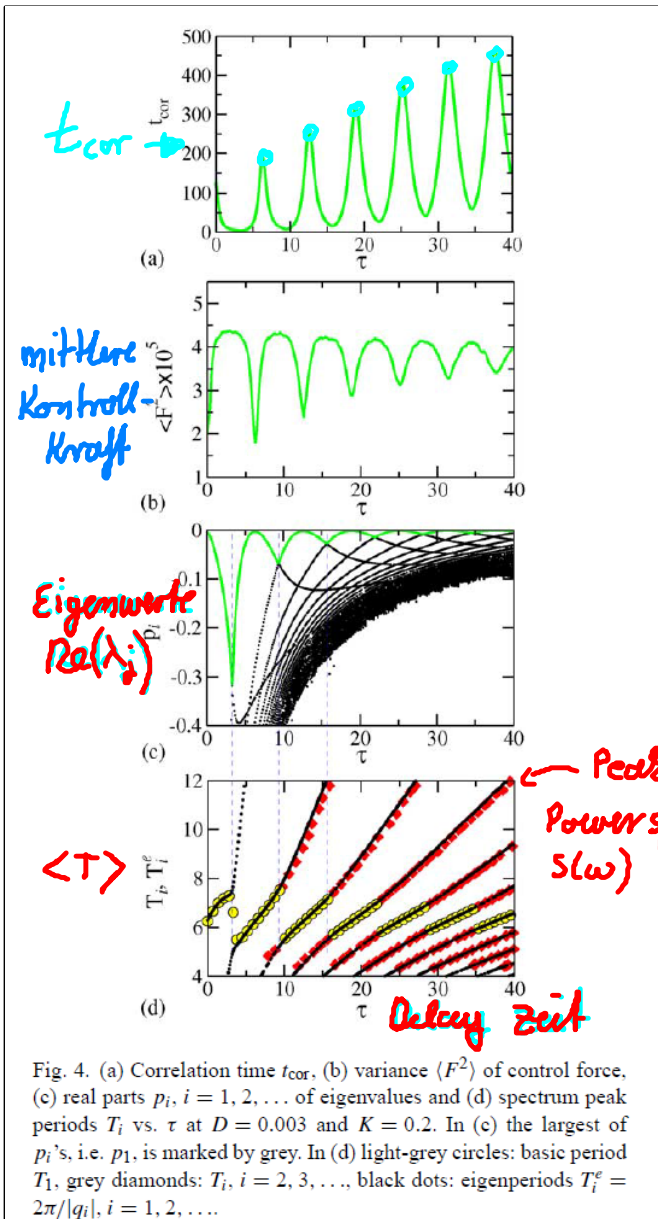
$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + K[y(t-\tau) - y(t)] + Df(t)$$

2. Fitzhugh - Nagumo - System (globale Osz.)

$$\epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y$$

$$\dot{y} = x + a + K[y(t-\tau) - y(t)] + Df(t)$$



Van - der - Pol Osz.

- nichtmonotone Modulation von t_{cor} als Funktion von τ
- stückweise lineare Modulation der dominanten Periode (Peak in $S(\omega)$)

5.2.1 Erklärung durch Eigenmoden des stabilen Fixpunktes im Van - der - Pol System

linearisierte Gl. um $x=0, y=0$ ($D=0$)

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x} + \omega_0^2 x - K(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 - \lambda \varepsilon + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tau} - 1) = 0}$$

charakt. Gleichung

keine delay-induzierte Hopf-Bifurkation ($\lambda = i\varphi$), denn

$$\text{Re: } -\varphi^2 + \omega_0^2 - K\varphi \sin \varphi\tau = 0 \quad (1)$$

$$\text{Im: } \underbrace{-\varphi\varepsilon}_{< 0} + K\underbrace{\varphi(1 - \cos \varphi\tau)}_{> 0} = 0 \quad (2) \Rightarrow \underbrace{\cos \varphi\tau}_{\leq 1} = \frac{K + |\varepsilon|}{K} > 1$$



Ursprung der Peaks in $S(\omega)$?

Eigenwerte $\lambda = \rho + i\varphi$

• Oszil. Verhalten von $\text{Re} \lambda$ als Fkt. von τ

Moden überkreuzen sich: $T_1^e = \frac{2\pi}{|\varphi_1|}$ springt



Eigenperiode des Fixpunktes



dominante Periode der Osz.

langsamste Mode
($|\rho|$ am kleinsten)

dominiert die Dynamik
Kohärenz am größten wenn
 $|\rho|$ am kleinsten ist

$\hat{=}$ am wenigsten stabile Moden

können am leichtesten durch Rauschen
destabilisiert werden

$\Rightarrow \rho \approx 0$ und $|\varepsilon| \ll K$

(2) $\Rightarrow \cos \varphi\tau \approx 1$

$\Rightarrow \varphi\tau \approx 2\pi n, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow T_1^e = \frac{2\pi}{|\varphi_1|} \approx \frac{\tau}{n}$$

T_1^e stückweise linear
in τ

• Max. von $p_1(\tau)$ (Maximum der Kohärenz)

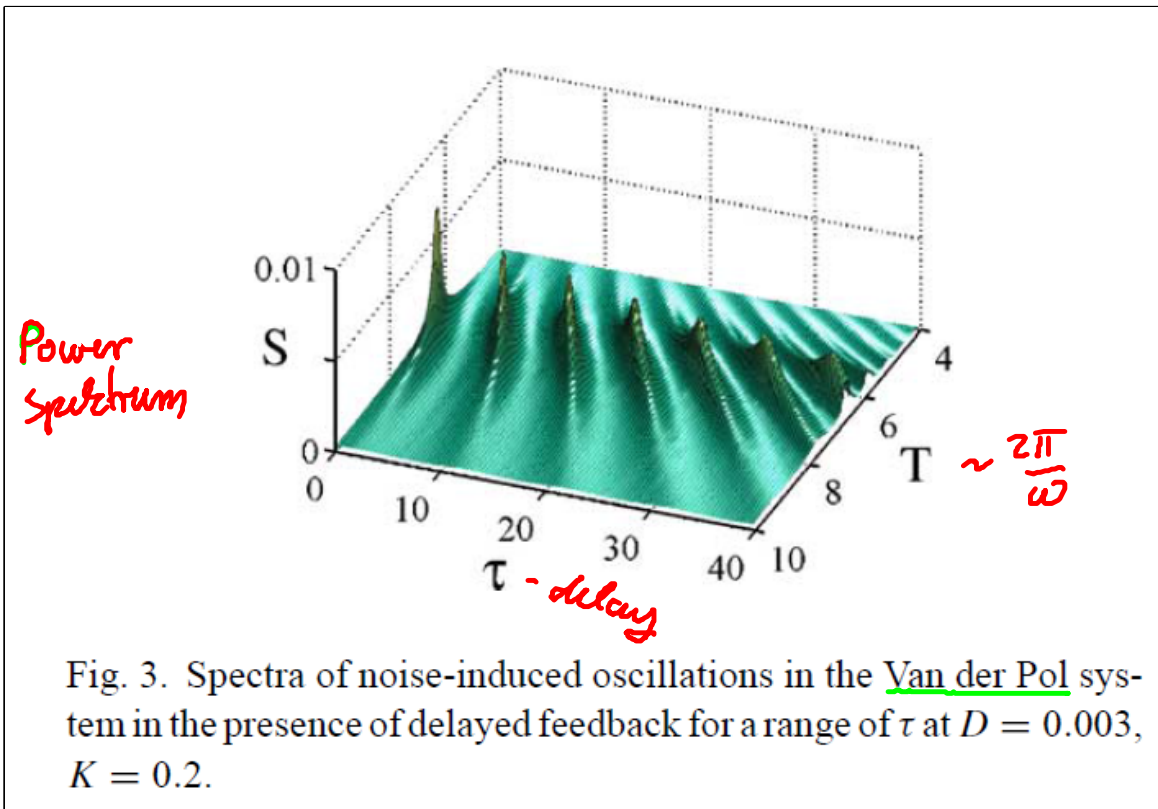
$$p_1 \neq 0, \quad \varphi = \frac{2\pi n}{\tau} \Rightarrow \varphi^2 = \omega_0^2$$

$$\tau = 2\pi \frac{n}{\omega_0} = nT_0$$

T_0 Periode des Fixpunktes ohne Störung

wenn $\tau = nT_0 \Rightarrow$ Maximum von t_{coh}

5.2.2. Spektrale Eigenschaften - Mean-field Näherung



• Neue Maxima durch Kontrolle in $S(\omega)$

Ziel: Analytische Theorie für t_{coh} u. $S(\omega)$ als Funktion von K, τ, D

zunächst $K=0$

Näherung: $\underbrace{\varepsilon - x^2}_{\uparrow \text{Dämpfung}} \approx \varepsilon - \langle x^2 \rangle \equiv \tilde{\varepsilon} < 0$

(gut für $D \ll |\varepsilon/\omega_0|$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \tilde{\epsilon} y - \omega_0^2 x + D \zeta(t) \end{cases}$$

lineare stochastische DGL mit
Gauß'schem weißem Rauschen

(Ornstein-Uhlenbeck Prozess) Lit: Gardiner

$$d\underline{x}_s = -\underline{A}\underline{x}_s dt + \underline{B} d\underline{W}(t)$$

$$\underline{x}_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & -\tilde{\epsilon} \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

stationären stochastischen
Prozess ($\langle x_s \rangle = 0$)

$$\Rightarrow \text{Varianz-Matrix } \underline{\sigma} = \langle \underline{x}_s(t) \otimes \underline{x}_s(t) \rangle$$

$$= \frac{D^2}{-2\tilde{\epsilon}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{D^2}{-2\tilde{\epsilon} \omega_0^2} = \frac{D^2}{-2(\epsilon - \langle x^2 \rangle) \omega_0^2}$$

selbstkonsistente Lösung von $\langle x^2 \rangle$ in Abhängigkeit von D

$$\langle x^2 \rangle^2 - \epsilon \langle x^2 \rangle - \frac{D^2}{2\omega_0^2} = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\epsilon}{2} \stackrel{(+)}{-} \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}}$$

(+) unphysikalisch

$$\tilde{\zeta} = \zeta - \langle x^2 \rangle = \frac{\zeta}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\zeta^2 \omega_0^2}} \right)$$

Dämpfung $\hat{=}$ Abstand zur Hopf-Bifurkation
wächst mit Leuschintensität D

Autokorrelation für linearen stoch. Prozess

$$\tilde{\Psi}_{yy}(s) = \langle y(t) y(t+s) \rangle \approx \tilde{\Psi}_{yy}(0) e^{ps} \cos \tilde{\omega}s$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= p \pm i\tilde{\omega} \\ &= \frac{\tilde{\zeta}}{2} \pm i \sqrt{-\frac{\tilde{\zeta}^2}{4} + \omega_0^2} \\ &\uparrow \\ &\text{EW von } \underline{A} \end{aligned}$$

$$t_{\text{cor}} = \frac{1}{\tilde{\Psi}_{yy}(0)} \int_0^{\infty} |\tilde{\Psi}_{yy}(s)| ds \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ps} ds = -\frac{2}{\pi p}$$

$$t_{\text{cor}} = \frac{4}{\pi |\tilde{\zeta}|}$$

als Funktion von D ($K=0$)

Mit Kontrolle $K \neq 0$

$$\lambda^2 - \tilde{\zeta}\lambda + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tau} - 1) = 0 \quad \textcircled{+}$$

charakt. Gl.
(enthält nichtlin.
Dämpfung durch $\tilde{\zeta}$)

$$\tau \approx n \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \text{unendl. viele EW } \lambda_j^c = \rho_j e + i\varphi_j e$$

Die 2 EW $\lambda_{1,2}^c = \delta_{\rho} \pm i(1 + \delta_{\varphi}) \omega_0$ mit betragsmäßig
kleinsten $|\delta_{\rho}|$ sind von allen anderen EW separiert
($\hat{=} \tau \rightarrow 0$)
was $\textcircled{+}$

$$\tau \approx nT_0 : t_{cor} = -\frac{2}{\pi \delta_p} \approx \frac{4}{\pi |\epsilon|} \left(1 + \frac{K\epsilon}{2}\right) \quad \text{⊗}$$

Herleitung siehe :

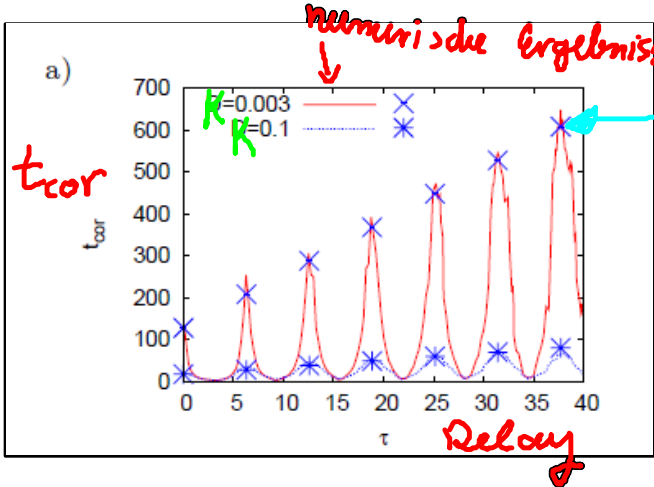
EUROPHYSICS LETTERS 1 August 2005

Europhys. Lett., 71 (3), pp. 366–372 (2005)

DOI: 10.1209/epl/i2005-10100-9

Mean-field approximation of time-delayed feedback control of noise-induced oscillations in the Van der Pol system

J. POMPLUN, A. AMANN and E. SCHÖLL(*)



numerische Ergebnisse

Analytik für $\tau = nT_0$ aus ⊗

prima Übereinstimmung von Mean-field Näherung und vollem System.

Spektrale Leistungsdichte $S(\omega)$

Methode : Fourier Transform der Mean-field Gl.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{x}(\omega)$$

DGL
=>

$$-i\omega \hat{x}(\omega) = \hat{y}(\omega)$$

$$-i\omega \hat{y}(\omega) = \tilde{\epsilon} \hat{y}(\omega) - \omega_0^2 \hat{x}(\omega) + D \hat{f}(\omega) + K \hat{y}(\omega) (e^{i\omega\tau} - 1)$$

Lösung möglich

$$\hat{y}(\omega) = \frac{i\omega D \hat{f}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \tilde{\epsilon} - i\omega K (e^{i\omega\tau} - 1)}$$

$$\rightarrow \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \dots$$

$$\rightarrow \text{Wiener - Khinchin - Theorem} \Rightarrow \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \dots = \delta(\omega - \omega') S(\omega')$$

$$\rightarrow S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_0^2 + \omega K \sin \omega \tau)^2 + \omega^2 (\tilde{\epsilon} - K(1 - \cos \omega \tau))^2}$$

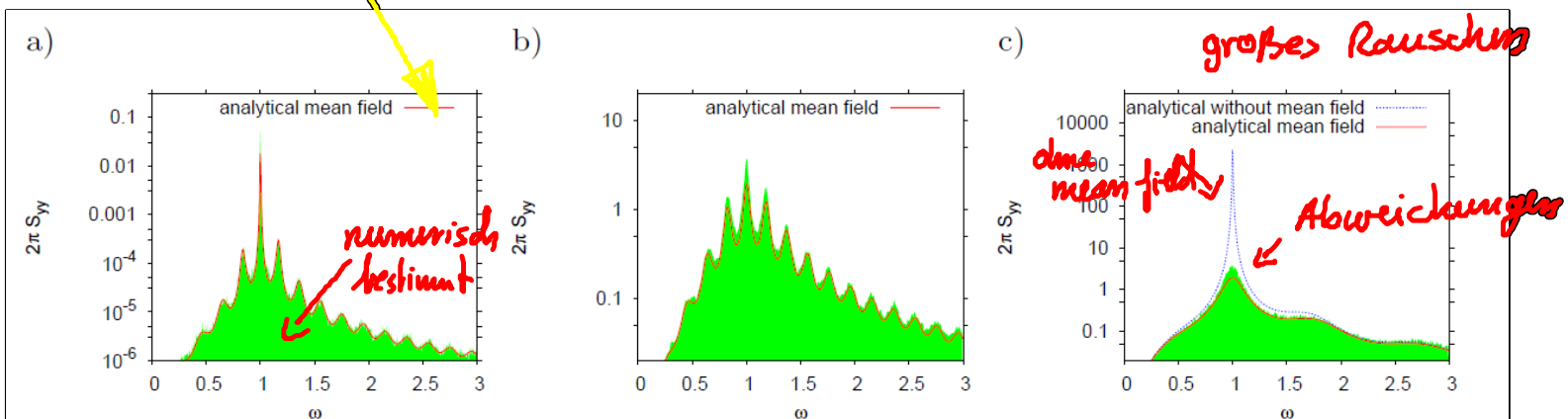


Fig. 4 - Spectrum $S_{yy}(\omega)$ for the VdP system in the presence of delayed feedback for $\epsilon = -0.01$, $K = 0.2$: a) $D = 0.003$, $\tau = 31.4$; b) $D = 0.5$, $\tau = 31.4$; c) $D = 0.5$, $\tau = 6.3$. Shaded: numerically simulated spectra; solid line: spectrum estimated analytically by (19); dashed line in c): spectrum estimated analytically without mean field ($\tilde{\epsilon} = \epsilon$) [14].

