6.2. Normalform der Laser-Ratengleichungen

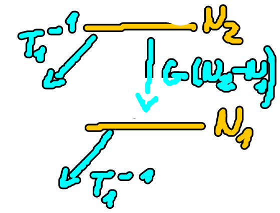
(in der Nähe der Laserschwelle)

(I) $\dot{E} = \frac{1}{2} E(D-1)$

(II) $\dot{D} = \gamma_\parallel (P - D(1+E^2))$

E: $E = \sqrt{2 G T_1}\,\tilde{E}$ dimensionslose elektrische Feldamplitude

D: dimensionslose Inversion des 2-Niveau Systems $D = G \tau_{ph} (N_2 - N_1)$

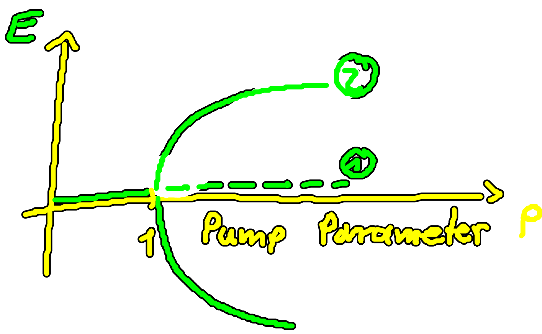


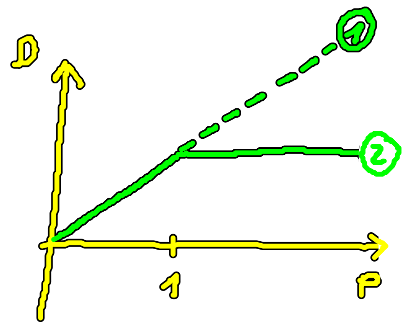
τ_{ph}: Photonenlebensdauer

$\gamma_\parallel$: τ_{ph}/T_1

t: dimensionslose Zeit $t = t^{dim}/\tau_{ph}$

Stationäre Lösungen





① $E=0$, $D=P$

② $E = \pm\sqrt{P-1}$, $D=1$

Asymptotische Entwicklung

Def.: Die Summe $\sum_n^N f_n(\varepsilon)$ heißt asymptotische Entwicklung für $\varepsilon \to 0$, wenn

$$\frac{f(\varepsilon) - \sum^M f_n(\varepsilon)}{f_M(\varepsilon)} \to 0 .$$

„Die Abweichung ist kleiner als der letzte Term der Entwicklung" üblicherweise Entwicklung in Potenzreihe von ε

$$f(\varepsilon) \sim \sum_n^N a_n \varepsilon^n \qquad \varepsilon \to 0$$

- **Vielzeitenansatz** für Lasergleichung

Potenzreihen

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \dots$$

$$D = 1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots$$

(ungestörtes Problem $p=1$ Lösung $E=0$, $D=1$)

kleiner Parameter

$$p-1 = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

verschiedene Zeitskalen als unabhängige Variablen

$\tau_1 = \varepsilon t$ „langsam"

$\tau_2 = \varepsilon^2 t$ „noch langsamer"

$\tau_n = \varepsilon^n t$

$$\Rightarrow E(t) = E(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n)$$

$\to$ Kettenregel beim Zeitableiten

$$\frac{dE}{dt} = \underset{\uparrow \frac{\partial \tau_1}{\partial t}}{\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial E}{\partial \tau_2}$$

$$\left[\begin{aligned} \dot{E} &= \tfrac{1}{2} E(D-1) \\ \dot{D} &= \gamma_\parallel (p - D(1+E^2)) \end{aligned}\right]$$

$\Rightarrow$ Einsetzen in (I) und (II) "rechte Seite"

$$\dot{E} = \frac{1}{2}(\varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2)(\varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2) + O(\varepsilon^4)$$

$$\dot{D} = \gamma\left(1 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 - \left(1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \varepsilon^3 D_3\right)\left(1 + \varepsilon^2 E_1^2 + 2E_1E_2\varepsilon^3\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right)$$

"linke seite"

$$\dot{E} = \varepsilon \frac{\partial \varepsilon E_1}{\partial \tau_1} + \varepsilon \frac{\partial \varepsilon^2 E_2}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varepsilon E_1}{\partial \tau_2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

$$\dot{D} = \varepsilon \frac{\partial \varepsilon D_1}{\partial \tau_1} + \varepsilon^3 \left[\frac{\partial D_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial D_1}{\partial \tau_2}\right]$$

Sortieren nach Ordnungen von ε

Koeffizientenvergleich

$\mathcal{O}(\varepsilon)$ $\quad p_1 - D_1 = 0 \quad$ (a)

$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ $\quad \dfrac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = \dfrac{1}{2} E_1 D_1 \quad$ (b)

$\quad \dfrac{\partial D_1}{\partial \tau_1} = \gamma\left(p_2 - D_2 - E_1^2\right) \quad$ (c)

$\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ $\quad \dfrac{\partial E_2}{\partial \tau_1} + \dfrac{\partial E_1}{\partial \tau_2} = \dfrac{1}{2}\left(E_2 D_1 + E_1 D_2\right) \quad$ (d)

Iteratives Lösen der Gleichungen (a) – (d)

$\mathcal{O}(\varepsilon)$ $\quad D_1 = p_1 \xrightarrow[\mathcal{O}(\varepsilon^2)]{\text{Einsetzen in}} \dfrac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = \dfrac{1}{2} p_1 E_1$

$$E_1 = E_1(0)\, e^{\frac{1}{2} p_1 \tau_1}$$

unbeschränkt oder Null für $p_1 \neq 0$

↯ Annahme

$\rightarrow p_1 = 0 = D_1$

$\rightarrow \dfrac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0$ E_1 nicht von τ_1 abhängig

(c): $D_2 = p_2 - E_1^{\,2}$

$\rightarrow D_2$ auch nicht von τ_1 abhängig

(d): $$\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \underbrace{\boxed{-\frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} + \frac{1}{2} E_1 D_2}}_{\text{nicht } \tau_1 \text{ abhängig}}$$

$= \text{const}$ $\rightarrow$ E_2 unbeschränkt falls $\text{const} \neq 0$

(*) $$\boxed{\frac{\partial E_1}{\partial \tau_2} = \frac{1}{2} E_1 D_2 \overset{(c)}{=} \frac{1}{2} E_1 \left(p_2 - E_1^{\,2}\right)}$$

DGL für $E_1(\tau_2)$

$p - 1 = \cancel{\varepsilon p_1} + \varepsilon^2 p_2 \dots$

O.B.d.A

$p_2 = 1$, $p_j = 0$ für $j \geq 3$

$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{p-1}$

Rücktransformation

Wir wissen: $D_1 = 0$, $p_1 = 0$, $\dfrac{\partial E_2}{\partial \tau_1} = \dfrac{\partial E_1}{\partial \tau_1} = 0$

$$\dot{E} = \varepsilon \cancel{\frac{\partial \varepsilon E_1}{\partial \tau_1}} + \varepsilon^3 \left[\cancel{\frac{\partial E_2}{\partial \tau_1}} + \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2}\right] + \dots \Rightarrow \dot{E} = \varepsilon^3 \frac{\partial E_1}{\partial \tau_2}$$

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 \quad \rightarrow \quad \varepsilon E_1 = E - O(\varepsilon^2)$$

$$D = 1 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2$$

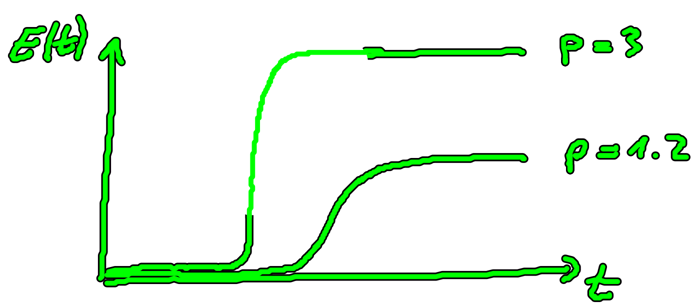
$\Rightarrow$ Einsetzen in (5)

$$\dot{E} = \varepsilon^3 \left(\frac{1}{2} E_1 (1 - E_1^2) \right)$$

$$\boxed{\dot{E} = \frac{1}{2} E (\varepsilon^2 - E^2) + O(\varepsilon^3)}$$

Normalform der Laserbifurkation an der Schwelle
$\rightarrow$ Heugabel - Bifurkation

- Normalform ergibt Lösung des DGL Systems nicht nur in der Nähe des Fixpunktes



- wieder kritische Verlangsamung (wie im Fall μ groß)

$\tau_2 = \varepsilon^2 t = (P-1)t$

τ_2 wird beliebig langsam für $\varepsilon \rightarrow 0$

- Gültigkeitsgrenzen der Amplitudengleichung ?

Beim Ansatz der Vielzeitenasymptotik wurde die Zeitskala $\mu P = \lambda_1$ ignoriert. (2. Eigenwert)

Das ist ok wenn μP nur schnellen Exp. Abfall liefert.

Problem wenn γP auch klein!

$\Rightarrow$ Nur gültig für $\boxed{|P-1| \ll \gamma}$

Erinnerung Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\gamma P + \frac{P-1}{P}$$

$$\lambda_2 = -\frac{P-1}{P}$$

• für $\gamma = 10^{-3}$ (class B laser) läßt dies nur einen kleinen Gültigkeitsbereich.

Grenzfall $\gamma \to 0$

- lineare Stabilitätsanalyse für feste P (nahe am Fixpunkt) $\to$ 6.1. Relaxations-Oszillationen
- $|P-1| \ll$ $\to$ Amplitudengleichung
- P fest + weit weg vom Fixpunkt ?

6.3. Nichtlineare Stabilitätsanalyse im Fall $\gamma \to 0$

Idee: • Wieder störungstheoretischer Ansatz aber diesmal kleiner Parameter γ

• Lösung soll für $\gamma \to 0$ gut sein.

$\dot{I} = I\,(D-1)$

$\dot{D} = \gamma\,(P - D(1+I))$

Problem: ungestörte Gleichungen ($\gamma = 0$)

$$|E^2| = I$$

$$\dot{I} = I\,(D(0)-1)$$

$$I(t) = I(0)\, e^{(D(0)-1)\,t}$$

d.h. $I \to \infty$ oder $I \to 0$
$\to$ unphysikalisch

$\gamma \to 0$ ist singulärer Grenzfall

Lösung: Reskalieren damit γ nicht mehr die rechte Seite multipliziert.

Ansatz:

$$s = \sigma t$$
$$I = P - 1 + \alpha y$$
$$D = 1 + \beta x$$

σ, α, β sind gesucht

x, y neue dynamische Variablen

$$\frac{\alpha}{\sigma} y' = (P - 1 + \alpha y)\beta x = x\left(\underbrace{\boxed{\frac{\sigma\beta}{\alpha}(P-1)}}_{\overset{!}{=}1} + \overbrace{\boxed{\sigma\beta}}^{\overset{!}{=}1} y\right) \overset{!}{=} x(1+y)$$

$$\frac{\beta}{\sigma} x' = \gamma\,(P - (1 + \beta x)(P + \alpha y))$$

Bedingung:
$\sigma\beta = 1$

$\frac{\sigma\beta}{\alpha}(P-1) = 1$

mit Bed:

$$\Rightarrow \quad x' = -\sigma\gamma P x - \underbrace{\sigma^2\gamma(P-1)}\, y - \sigma\gamma(P-1)\, x y$$

$$\gamma\sigma^2(P-1) = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\gamma(P-1)} = \frac{1}{\omega_R^2}$$

$$x' = -y - \gamma\sigma x\,(p-(p-1)y)$$

$$= -y - \underbrace{\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{p-1}}}_{\varepsilon^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{p-1}} \ll 1} x\,(p-(p-1)y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= (1+y)\,x \\ \dot{x} &= -y - \varepsilon^2 x\,(p-(p-1)y) \end{aligned}}$$

Nun: Grenzfall $\gamma \to 0$ führt nicht mehr zu singulärem Problem

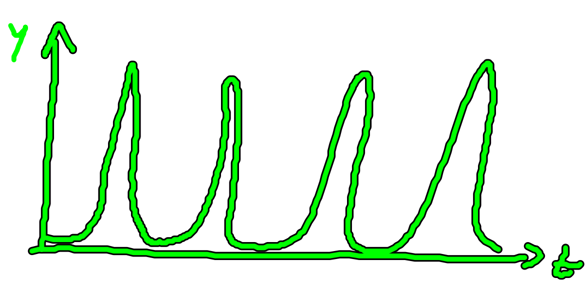
sondern zum konservativen ungestörten Problem

$\to$ analytisch lösbar

Def.: Das System $\underline{F}(\underline{x}) = \dot{\underline{x}}$ heißt konservativ, wenn es eine Funktion C gibt so dass

$$\underline{F}\,\nabla_x C = 0$$

Ausblick:



(Lösung des ungestörten Problems)