Summary →

- Reduction of laser rate equations
  1. close to laser threshold
     ⇒ amplitude equations $\dot{E} = \frac{1}{2} E\left((p-1) - E^2\right)$
     - only valid if $|p-1| \ll \gamma$ $\quad \gamma = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$
  2. rescaling for $\gamma \ll 1$ $\boxed{\text{Class B}}$

$$I = (p-1)(1+y)$$
$$D = 1 + \omega_R x$$
$$s = \omega_R t$$

new time

Intensity

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= (1+y)x \\ \dot{x} &= -y - \varepsilon^2 x\left(p - (p-1)y\right) \end{aligned}}$$

Inversion

$$\omega_R = \frac{1}{\gamma (p-1)}$$
$$\varepsilon^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{p-1}}$$

≙ equivalent to class B equations

6.3.2. Ungestörtes Problem (Class B Laser $\gamma = 0$)

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = (1+y)x$$

System ist konservativ

$$\boxed{C = \frac{x^2}{2} + y - \ln(1+y)}$$

(Bed.: $F(x) = \dot{x}$ ist konservativ
$\underline{F}\, \nabla_x C = 0$)

$$\nabla C = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

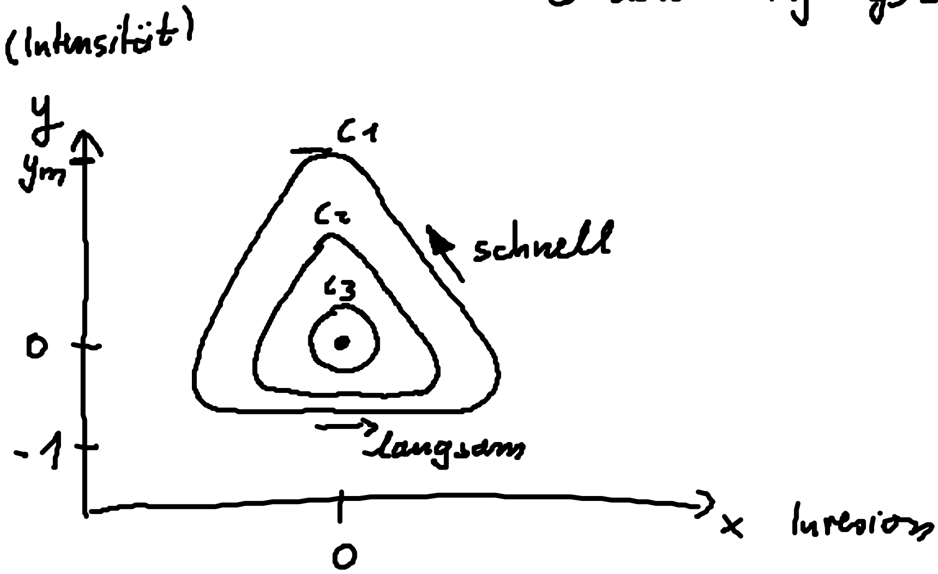
$$F(x) = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y)\,x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; -xy + \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)(1+y)\,x$$
$$= -xy + x(1+y) - x$$
$$= 0$$

$$x(y) = \pm\sqrt{2\left(C - y + \ln(1+y)\right)}$$

d.h. zu jedem C gibt es eine Trajektorie $x(y)$ im Phasenraum

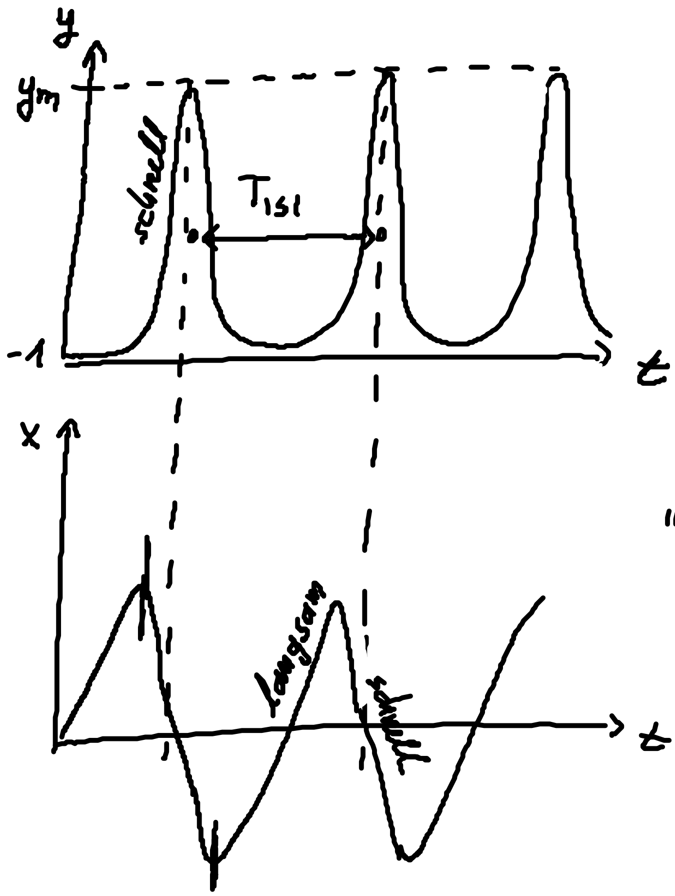
- C durch Anfangsbedingungen gegeben



$y = -1 \quad \Rightarrow I = 0$

- Zeitabhängigkeit noch unklar
- Lösungen sind nichtlineare Schwingungen

numerisch:



„schiefer Sägezahn"

- Interspike Intervall T_{isi}
  ≈ Zeit während $y = -1$

DGL: $\dot{x} = 1$ für $y = -1$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx = \int_{t}^{t+T_{isi}} ds$$

$$2\sqrt{2C} = T_{isi}$$

- Periode der Pulse hängt von C also von AB ab

- Maximale Intensität von y
  y_m erreicht wenn $x = 0$
  $\Rightarrow y_m = C$

$\Rightarrow$ Periode und Intensität sind korreliert

$$y_m = \frac{T_{isi}^2}{8}$$

kann man messen!

[aber: im Laser verschwindet Dämpfung nicht]

Zeitentwicklung →

$$\dot{y} = (1+y)x$$
$$\dot{x} = -y$$
$$\Rightarrow \quad 0 = \ddot{x} + x - \dot{x}x$$

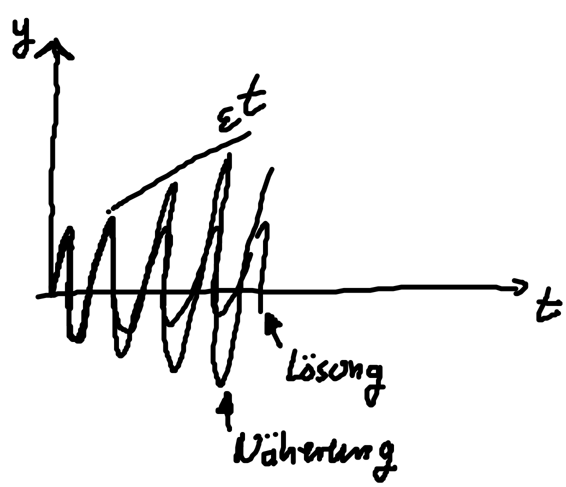
Oszillator mit nichtlinearer Reibung

Ansatz wieder über Potenzreihe

Problem: $\boxed{\text{Bsp.}}$ $\cos((1+\varepsilon)t) = \cos t - \underline{\varepsilon t \sin t} + O(\varepsilon^2)$

variable Periode

ist nur "gut" für $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$



d.h. periodische Lösung schwierig mit Potenzreihenansatz

Lösung: • Poincaré – Lindstedt Methode

• Einführen einer gestreckten Zeit $\tau = \omega(\varepsilon)t$

→ Periode der Lösungen in τ ist nicht ε abhängig

(Periode in t ist weiter ε abhängig)

$\rightarrow y = y(\tau, \varepsilon)$

$$\tau = (1+\alpha A^2)s$$

A: Amplitude

α: noch zu bestimmen

$$x(\tau) = A x_0(\tau) + A^2 x_1(\tau) + O(A^3)$$

$$y(\tau) = A y_0(\tau) + A^2 y_1(\tau) + O(A^3)$$

- für $A^2 \to 0$ ist Lösung harmonische Schwingung

- Einsetzen in DGL

$\dot{y} = (1+y)x$

$\dot{x} = -y$

$$\frac{\partial}{\partial s} = (1+\alpha A^2)\frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$(1+\alpha A^2)(A\dot{y}_0 + A^2\dot{y}_1) = [1+(Ay_0 + A^2 y_1)](Ax_0 + A^2 x_1)$$

$$(1+\alpha A^2)(A\dot{x}_0 + A^2\dot{x}_1) = -(Ay_0 + A^2 y_1)$$

- Sortieren nach Ordnungen von A

$$A(x_0 - \dot{y}_0) + A^2(x_0 y_0 + x_1 - \dot{y}_1) + O(A^3) = 0$$

$$\underbrace{A(\dot{x}_0 + y_0)}_{O(A)} + \underbrace{A^2(\dot{x}_1 + y_1)}_{O(A^2)} + O(A^3) = 0$$

$O(A)$:
$$y_0 = e^{i\tau} + c.c.$$
$$x_0 = ie^{i\tau} + c.c.$$

$O(A^2)$: $\quad x_0 y_0 + x_1 - \dot{y}_1 = 0$

$\dot{x}_1 + y_1 = 0$

$\Longleftrightarrow \quad -ie^{2i\tau} = \ddot{x}_1 + x_1$

$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3} i e^{2i\tau} + cc$

$y_1 = -\frac{2}{3} e^{i2\tau} + cc$

noch keine Bedingung für α

$O(A^3)$: $\quad \dot{y}_2 + \alpha \dot{y}_0 = (y_1 x_0 + x_1 y_0) + y_2$

$\dot{x}_2 + \alpha \dot{x}_0 = -y_2$

$\Rightarrow$ mit bekannten x_1, x_0

$$\boxed{\ddot{x}_2 + x_2 = 2i\alpha e^{i\tau} + \frac{1}{3} i e^{3i\tau}}$$

Bedingung an die Lösung: Lösung muss periodisch sein!

Einschub:

Satz: Wenn $f: T \to \mathbb{R}$ eine glatte periodische Funktion ist wobei T die Periode ist und die DGL $\ddot{y} + y = f$ gegeben ist, dann gibt es eine periodische Lösung falls

$$\int f(t) \cos t \, dt = 0 \quad , \quad \int f(t) \sin t \, dt = 0$$

Beweis: Sei das innere Produkt $\langle y, z \rangle = \int y(t) z(t) \, dt$

T

und DGL $Ay = f$ mit

$$A = \frac{d^2}{dt^2} + 1$$

$$\underline{\langle y, Az \rangle} = \int y(z'' + z)\,dt$$ 2x partiell integrieren

$$= \int (y'' + y)\, z\, dt$$

$$= \underline{\langle Ay, z \rangle}$$

$\Rightarrow A$ ist selbstadjungiert

wenn $Ay = f$ und $\boxed{Az = 0}$ $\hat{=}$ z ist Lösung der homogenen DGL $\hat{=}$ $\sin t$, $\cos t$

$$\langle f, z \rangle = \langle Ay, z \rangle = \langle y, Az \rangle = 0$$

Anwendung der Lösbarkeitsbedingung auf $O(A^3)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -\frac{1}{6}}}$$

Lösung der DGL bis $O(A^3)$:

$$\tau = \left(1 - \frac{1}{6}A^2\right)s$$

$$x(\tau) = \underline{iAe^{i\tau}} + \frac{1}{3}A^2 \underline{e^{2i\tau}} + cc + O(A^3)$$

$$y(\tau) = Ae^{i\tau} - A^2\frac{2}{3}e^{2i\tau} + cc + O(A^3)$$

- je nach Zahl Ordnungen werden die Schwingen anharmonischer
- Lösung gültig für alle τ

- Class B Laser: $\gamma = 0$ => - anharmonische Schwingungen
  - Erhaltungsgröße C

  $\gamma \neq 0$ => mit $\gamma \neq 0$ müssen die nächsten Ordnungen in $\sqrt{\gamma}$ mitgenommen werden

nichtlineare Analyse "Spiking"

lineare Stabilitäts-analyse