e) Drehungen:

• Drehung der ONB: $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \longrightarrow \{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$

$$\boxed{\underline{e}_i' = D_{ij}\,\underline{e}_j} \quad (2.26) \longrightarrow \boxed{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k \overset{\uparrow}{=} D_{ik}} \quad (2.26a)$$

$$D_{ij}\,\underbrace{\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{jk}}$$

$$\xrightarrow{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k' = \delta_{ik}} \boxed{\begin{aligned} D_{ij}\,D_{kj} &= \delta_{ik} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}} \quad (2.27)$$

• aktiver Standpkt:

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{gedrehtes}} D\underline{\underline{T}} := T_{kl}\,\underline{e}_k' \otimes \underline{e}_l',$$

$$= T_{kl}\,D_{ki}\,D_{lj}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

gedrehtes $\underline{\underline{T}}$ in ONB $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$$\boxed{\begin{aligned} D\underline{\underline{T}} &= [D\underline{\underline{T}}]_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\ [D\underline{\underline{T}}]_{ij} &= T_{kl}\,D_{ki}\,D_{lj} \\ &= D^t_{ik}\,D^t_{lj}\,T_{kl} \\ &= D^t_{ik}\,T_{kl}\,D_{lj} \end{aligned}} \quad (2.28)$$

• passiver Standpkt: $\underline{\underline{T}}$ in $\{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$?

also $\underline{\underline{T}} = T_{kl}\,\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \overset{!}{=} T_{ij}'\,\underline{e}_i' \otimes \underline{e}_j'$

$\longrightarrow$ Trafo von Tensor komp:

$$T_{ij}' \overset{(2.16)}{=} \underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j' = \underline{e}_i' \cdot (T_{kl}\,\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\,\underline{e}_j' = T_{kl}\,\underbrace{(\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k)}_{D_{ik}}\underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j')}_{D_{jl}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} T_{ij}' &= D_{ik}\,D_{jl}\,T_{kl} \\ T_{ij} &= D^t_{ik}\,D^t_{jl}\,T_{kl}' \end{aligned}}$$

f) Diagonalisierung eines symmetrischen $\underline{\underline{T}}$:

- „Tensor begreifen"
- Eigenwertproblem

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a}} \qquad (2.30)$$

Eigenvektor (EV) Eigenwert λ

mit
$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij} \\ \lambda^{(i)} \in \mathbb{R} \end{array}} \qquad (2.31)$$

- Darstellung von $\underline{\underline{T}}$ in Eigenvektor-Basis $\{\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)}\}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{T}} = T'_{ij}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)} = \sum_i \lambda^{(i)}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(i)} \\ T'_{ij} = \lambda^{(i)} \delta_{ij} \qquad \underline{\underline{T}}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \end{array}} \qquad (2.32)$$

2.3 Vektor-/Tensoranalysis

- Motivation:

i.S. Kontinuumstheorie $\longleftrightarrow$ Felder

(1) Skalarfelder: $f(\underline{r},t) \in \mathbb{R}$ ... Massendichte
Temperatur
Ladungsdichte etc.

(2) Vektorfelder: $\underline{v}(\underline{r},t) \in V_p$ ... Geschwindigkeit
Impulsdichte
Kraft(dichte) etc.

(3) Tensorfelder: $\underline{\underline{T}}(\underline{r},t) \in V_p \times V_p$ .... Spannungstensor
Deformationsrate

Wie verändern sich diese Felder lokal?

a) vollständiges Differential:

• Skalarfeld $f(\underline{r},t)$:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i} \quad (2.33)$$

$\{x_1, x_2, x_3\}$ ... beliebige krummlinige Koordinaten

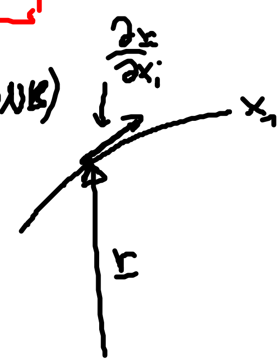
• ebenso:

$$\boxed{\begin{aligned} d\underline{v} &= \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\, dx_i \\ d\underline{\underline{T}} &= \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x_i}\, dx_i \end{aligned}} \quad (2.34)$$

b) Nabla-Operator

• Def: Führe „Gradient von f" $= \operatorname{grad} f$ als Vektor ein, so daß $df(\underline{r}) = \operatorname{grad} f \cdot d\underline{r}$ (2.35)

mit $d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} dx_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| \underline{e}_i\, dx_i$, $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ (ONB)



folgt

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \underline{e}_i} \quad (2.36)$$

... Gradient von f

• (2.36) gilt nur für ONB

Def: Nabla-Operator = Vektor-Differentialoperator

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \in V_p, \quad \nabla_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.37)$$

so daß $\operatorname{grad} f = \underline{\nabla} f$

• kartesische Koordinaten:

$\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| = 1$

$$\boxed{\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{e}_i \nabla_i} \quad (2.38)$$

damit Gradient:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{eines Skalarfeldes } f: & (\underline{\nabla} f)_i = \nabla_i f = f_{,i} \\ \text{" Vektorfeldes } \underline{v}: & (\underline{\nabla} \otimes \underline{v})_{ij} = \nabla_i v_j = v_{j,i} \\ \text{" Tensor v. 2 St. } \underline{\underline{T}}: & (\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}})_{ijk} = \nabla_i T_{jk} = T_{jk,i} \end{array}} \quad (2.39)$$

NB: Tensorstufe erhöht sich um 1 bei Gradientenbildung!

- Zylinder-, Kugelkoordinaten: $\nabla_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial x}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\nabla_i \underline{e}_j \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{also: Gradient} \\ \text{eines Vektorfeldes: } (\underline{\nabla} \otimes \underline{v}) = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (v_j \underline{e}_j) \\ \qquad = (\nabla_i v_j)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + v_j\, \underline{e}_i \otimes \nabla_i \underline{e}_j \\ \text{" Tensorfeldes: } (\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}}) = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \end{array}\right\} \quad (2.40)$$

s. Übungen

c) Divergenzbildung

- „Kontraktion über Indexpaar" $\longrightarrow$ Reduktion um 2 Tensorstufen
- kartesische Koord.:

Divergenz eines Vektors $\underline{v}$: $\boxed{\operatorname{div} \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \nabla_i v_i = v_{i,i}}$ (2.41)

Tensor 2. Stufe $\underline{\nabla} \otimes \underline{v} \longrightarrow$ Skalar $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$

Divergenz eines Tensor 2. St $\underline{\underline{T}}$: $\boxed{(\operatorname{div} \underline{\underline{T}})_i = \text{"}(\underline{\nabla}\underline{\underline{T}})_i\text{"} = \nabla_j T_{ij} = \underbrace{T_{ij,j}}_{\text{Konvention}}}$ (2.42)

$\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}} \longrightarrow$ Vektor $\operatorname{div} \underline{\underline{T}}$

- Zylinder-, Kugelkoordinaten: s. Übungen

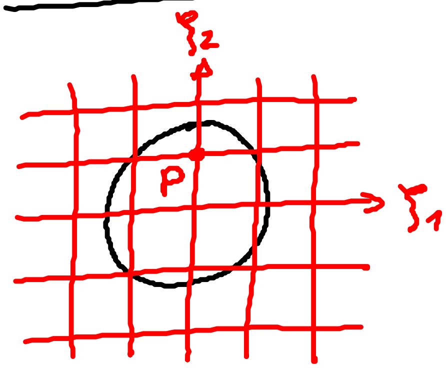
3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

- Ziel: (i) Vollständige Beschreibung der Dynamik zäher Flüssigkeiten
  (ii) Beispielhafte Vorgehensweise für Behandlung anderer Kontinua

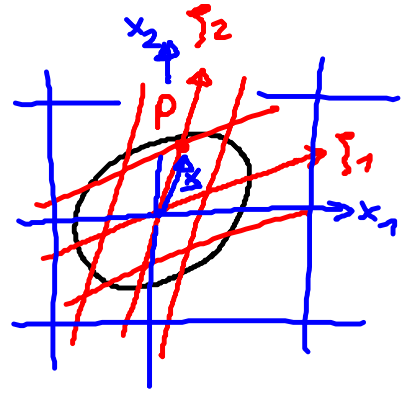
3.1 Kinematik

• Ziel: Beschreibung des dynam. Zustandes von Kontinua/Flüssigkeiten:
Variablen, Zeitableitung

a) materielle und räumliche Koordinaten



Bewegung
Deformation $\longrightarrow$
$\vdots$
$\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$



Kontinuum im Referenzstand
Bsp: undeformierter elast. Körper
$\underline{\xi}$ ... materielle oder Lagrangesche Koordinaten, indiziert Punkt $P = P(\underline{\xi})$ des Kontinuums

Ortsvektor $\underline{x}$ bzw x_1, x_2, x_3
... räumliche oder Eulersche Koordinaten von P bzgl. festes räumliche KOS (Laborsystem)

• Felder:

$\rho, \underline{v}, \underline{\underline{T}}(\underline{\xi}, t)$ ... materielle Darstellung $\longrightarrow$ elast. Körper

$\rho, \underline{v}, \underline{\underline{T}}(\underline{x}, t)$ ... räumliche " $\longrightarrow$ Flüssigkeit

• i.f. immer räumliche Darstellung!