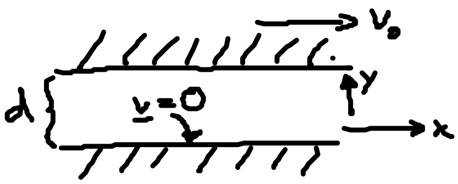
3.10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla} p + \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta+\eta')\,\underline{\nabla}(\mathrm{div}\, \underline{v})+\rho\, \underline{b} \qquad (3.62)$$

- einfache Schergeometrie: <u>Couette Strömung</u> = Strömung, erzeugt durch bewegte Berandung



$\underline{b}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}=0$

Annahme: $\underline{v} = v(y)\, \underline{e}_x$

$$\longrightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}=0, \quad \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}=0 \;\&\; \mathrm{div}\,\underline{v}=0 \longrightarrow \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v}=0$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} v(y)=0 \longrightarrow \boxed{v(y)=v_0\,\frac{y}{d}} \qquad (3.65)$$

Spannungstensor: $\underline{\underline{T}} = 2\eta\, \underline{\underline{A}}$

$\longrightarrow$ Kraft pro Flächeneinheit: $\boxed{T_{xy} = \eta\,\frac{\partial v(y)}{\partial y} = \eta\,\frac{v_0}{d}}$ (3.66)

Kraft-richtung

Flächen-normale

... Meßvorschrift für Scherviskosität η!

- Poiseuille-Strömung: s. Übungen

Fluß: $Q \sim R^4$!

- Viskositäten η, η':

Einheit: $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\cdot\frac{\text{Länge}}{\text{Geschw.}} = \text{Pa}\cdot\text{s} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}} = 10\,\frac{\text{g}}{\text{cm s}}$

$= 10$ P(oise)

Werte für η: s. Folie

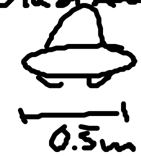
3.11 Die Reynoldszahl

- NS-Glm: keine intrinsische Längenskala (außer Molekülgröße)

  → NS-Glm: sind skaleninvariant (gültig auf Längen $\geq 10\,\mathrm{nm}$)

  ≙ Physik ist auf allen Skalen die Gleiche!

  → Ähnlichkeitsprinzip: Auto ⟷ Windkanal



- NS-Glm mit $\operatorname{div} \underline{v} = 0$, $\underline{b} = 0$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v} \right) = - \underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \quad (3.67)$$

mit a … charakt. Länge [Kanalbreite, Teilchenradius]

v_0 … " Geschw. [Flußgeschw., Driftgeschw]

Δp … " Druckabfall

→ Skalierung auf einheitenlose Größen:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{a/v_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\Delta p}$$

o.B. → $\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$

$$\boxed{Re \left(\frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\underline{v}} \cdot \tilde{\underline{\nabla}} \tilde{\underline{v}} \right) = - \frac{1}{2} Eu\, Re\, \tilde{\underline{\nabla}} \tilde{p} + \tilde{\underline{\nabla}}^2 \tilde{\underline{v}}}$$

Reynoldszahl: $Re = \frac{\rho a v_0}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} = \frac{\rho v_0^2 / a}{\eta v_0 / a^2}$

Eulerzahl: $Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = \frac{\text{Druckkräfte}}{\text{Trägheitskräfte}}$

→ Ähnlichkeitsprinzip:

Systeme mit gleicher Re & Eu verhalten sich gleich

- Einteilung:

  $Re < 1$: laminarer, schleichender Fluß

  Reibung dominiert ($\rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} < \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}$)

  vernachlässige $\rho \frac{dv}{dt}$ auf Zeiten a/v_0 ≙ $Re \ll 1$!

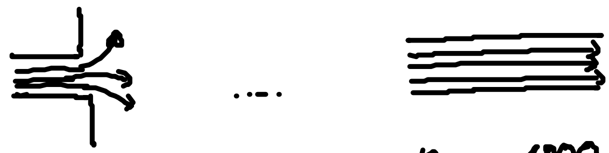
  Bsp: – Strömung um Kugel

  – Tropfen geschert

  $Re > 1$: Turbulenz, Trägheit dominiert

Bsp: Kaffeetasse

• Übergang zu Turbulenz: real, Geometrie abhängig



$Re = 3$ .... $Re = 1000$

• **Bsp:** Schwimmende Organismen.

30m Wal, $v_0 = 10\frac{m}{s} \longrightarrow Re \approx 3\cdot 10^{8}$ s. Folie

1µm Bakterium, $v_0 = 30\frac{\mu m}{s} \longrightarrow Re \approx 3\cdot 10^{-5}$!

• Kritische viskose Kraft:

$\eta \left[\frac{kg}{m\,s}\right]$, $\rho \left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$$\boxed{F_{krit} = \frac{\eta^2}{\rho}} \quad (3.71) \Longrightarrow \frac{\text{äußere Kraft } F}{F_{krit}} = \begin{cases} \ll 1, & \text{laminar} \\ \gg 1, & \text{Turbulenz} \end{cases}$$

konsistent mit Re?

$$\frac{\text{Reibungskraft} \sim \eta a v_0}{\eta^2/\rho} = Re \gtrless \frac{\text{Trägheitskraft} \sim \rho v^2 a^2}{\eta^2/\rho} = Re^2 \quad \text{für } Re \lessgtr 1$$

Bsp: Tabelle s. Folie

H_2O: $F < F_{krit} \approx 1\,nN \longrightarrow$ sehr zähe Flüssigkeit
Mikro-/Nanowelt

insbesondere: Zelle: $F \approx 1\,pN$
$\longrightarrow$ dominiert durch Reibung

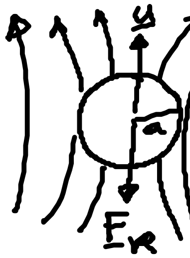
3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

• konstantes T: nur NS-Gln., keine Energiebilanz nötig!

• Motivation:

(1) hydrodynam. Moden der NS-Gln $\hat{=}$ Störungen um homogenen GG-Zustand

(2) Stokes Reibung: $\underline{F}_R = -6\pi\eta a \underline{u}$



mit Kugel mit bewegtes stationäres Geschw. profil!

$\longleftrightarrow$ Gültigkeit?

· **Zerlegungssatz** für Vektorfeld $\underline{v}$: o.B.

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{v}(\underline{x},t) \text{ ist bestimmt durch seine Wirbel } \mathrm{rot}\,\underline{v}, \\ \text{seine Quellen } \mathrm{div}\,\underline{v} \text{ und ein Anteil } \underline{v}_R \text{ mit} \\ \mathrm{div}\,\underline{v}_R = \mathrm{rot}\,\underline{v}_R = 0, \text{ um die Randbed. zu erfüllen}\end{array}}$$

a) **Wirbel**:

· Voraussetzung: $Re \ll 1 \longleftrightarrow$ vernachlässige $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\underline{v}$ $\Big\}$ Linearisierung in $\underline{v}$ & ρ

$\rho = \rho_0 + \delta\rho \approx \rho_0$

$\left[\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \rightarrow \rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}\right]$

mit rot (3.62) & rot $\underline{\nabla} \ldots = 0$ [für $-\nabla p$ und $\underline{\nabla}(\mathrm{div}\,\underline{v})$]

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\underline{\nabla}^2\right)\mathrm{rot}\,\underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{b}} \qquad (3.72)$$

... Diffusionsgleichung für Wirbel/Vortizität

$\frac{\eta}{\rho_0}$ ... Diffusionskonstante für Wirbel

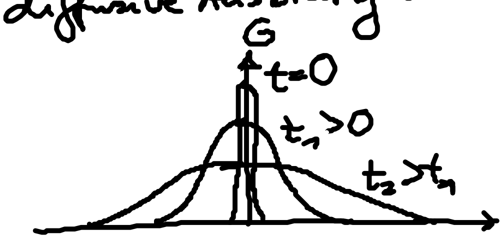
· Greensche Fkt.: $\mathrm{rot}\,\underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}}$, $|\hat{\underline{\nu}}| = 1$

... bei $t=0$ initiierte „pkt.förmiger" Wirbel

$\xrightarrow{\text{Lsg. von (3.72)}}$

$$\boxed{\underline{G}(\underline{x}-\underline{x},t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{\left(4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t\right)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\eta/\rho_0 t}}} \qquad (3.73)$$

... diffusive Ausbreitung des Pkt. Wirbels



mit $\lim\limits_{t\to 0} \underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \hat{\underline{\nu}}\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$

Normierung: $\int \underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t)\,d^3x = \hat{\underline{\nu}}$, $t \geq 0$