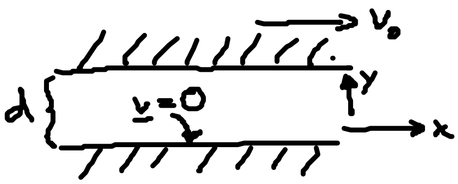
3.10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla} p + \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v} + (\eta+\eta')\,\underline{\nabla}(\operatorname{div}\underline{v}) + \rho\,\underline{b} \qquad (3.62)$$

- einfache Schergeometrie: <u>Couette Strömung</u> = Strömung, erzeugt durch bewegte Berandung



$\underline{b}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}=0$

Annahme: $\underline{v} = v(y)\,\underline{e}_x$

$\longrightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}=0, \quad \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}=0 \ \& \ \operatorname{div}\underline{v}=0 \longrightarrow \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v}=0$

$\longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y)=0 \longrightarrow \boxed{v(y)=v_0\frac{y}{d}}$ (3.65)

Spannungstensor: $\underline{\underline{T}} = 2\eta\,\underline{\underline{A}}$

$\longrightarrow$ Kraft pro Flächeneinheit: $\boxed{T_{xy} = \eta\frac{\partial v(y)}{\partial y} = \eta\frac{v_0}{d}}$ (3.66)

Kraft-richtung | Flächen-normale | ... Meßvorschrift für Scherviskosität η!

- Poiseuille-Strömung: s. Übungen

Fluß: $Q \sim R^4$!

- Viskositäten η, η':

Einheit: $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\cdot\frac{\text{Länge}}{\text{Geschw}} = \text{Pa}\cdot\text{s} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}} = 10\,\frac{\text{g}}{\text{cm s}}$
$= 10\ \text{P(oise)}$

Werte für η: s. Folie

3.11 Die Reynoldszahl

- NS-Glm: keine intrinsische Längenskala (außer Molekülgröße)

  $\longrightarrow$ NS-Glm: sind skaleninvariant (gültig auf Längen $\geq 10\,\mathrm{nm}$)

  $\hat{=}$ Physik ist auf allen Skalen die Gleiche!

  $\longrightarrow$ Ähnlichkeitsprinzip: Auto $\longleftrightarrow$ Windkanal

- NS-Glm mit $\operatorname{div} \underline{v} = 0$, $\underline{b} = 0$

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\underline{\nabla}p + \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v} \qquad (3.67)$$

mit a ... charakt. Länge [Kanalbreite, Teilchenradius]

v_0 ... " Geschw. [Flußgeschw., Driftgeschw.]

Δp ... " Druckabfall

$\longrightarrow$ Skalierung auf einheitenlose Größen:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{a/v_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\Delta p}$$

z.B. $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$ $\longrightarrow$

$$\boxed{Re\left(\frac{\partial \underline{\tilde{v}}}{\partial \tilde{t}} + \underline{\tilde{v}}\cdot\underline{\tilde{\nabla}}\,\underline{\tilde{v}}\right) = -\frac{1}{2}\,Eu\,Re\,\underline{\tilde{\nabla}}\,\tilde{p} + \underline{\tilde{\nabla}}^2\underline{\tilde{v}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Reynoldszahl: } Re = \frac{\rho a v_0}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} = \frac{\rho v_0^2/a}{\eta v_0/a^2} \\ &\text{Eulerzahl: } Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = \frac{\text{Druckkräfte}}{\text{Trägheitskräfte}} \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ Ähnlichkeitsprinzip:

$\boxed{\text{Systeme mit gleicher } Re \text{ \& } Eu \text{ verhalten sich gleich}}$

- Einteilung:

  $Re < 1$: laminarer, schleichender Fluß

  Reibung dominiert ($\rho\,\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} < \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v}$)

  vernachlässige $\rho\frac{d\underline{v}}{dt}$ auf Zeiten a/v_0 $\hat{=}$ $Re \ll 1$!

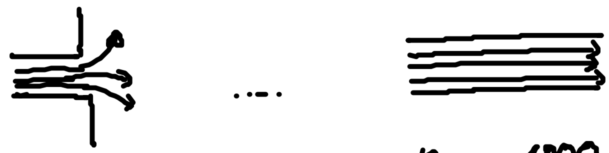
  Bsp: – Strömung um Kugel

  – Tropfen geschert

  $Re > 1$: Turbulenz, Trägheit dominiert

Bsp: Kaffeetasse

- Übergang zu Turbulenz: real, Geometrie abhängig



$Re = 3$ .... $Re = 1000$

- Bsp: Schwimmende Organismen.

  30m Wal, $v_0 = 10 \frac{m}{s} \longrightarrow Re \approx 3 \cdot 10^8$ s. Folie

  1μm Bakterium, $v_0 = 30 \frac{\mu m}{s} \longrightarrow Re \approx 3 \cdot 10^{-5}$!

- Kritische viskose Kraft:

  $\eta \left[\frac{kg}{m\,s}\right]$ $\quad \boxed{F_{krit} = \frac{\eta^2}{\rho}}$ (3.71) $\Longrightarrow \frac{\text{äußere Kraft } F}{F_{krit}} = \begin{cases} \ll 1, & \text{laminar} \\ \gg 1, & \text{Turbulenz} \end{cases}$

  $\rho \left[\frac{kg}{m^3}\right]$

  konsistent mit Re?

$$\frac{\text{Reibungskraft} \sim \eta a v_0}{\eta^2/\rho} = Re \gtrless \frac{\text{Trägheitskraft} \sim \rho v^2 a^2}{\eta^2/\rho} = Re^2 \qquad \text{für } Re \lesssim 1$$

Bsp: Tabelle s. Folie

H_2O: $F < F_{krit} \approx 1nN \longrightarrow$ sehr zähe Flüssigkeit

Mikro-/Nanowelt

insbesondere: Zelle: $F \approx 1pN$

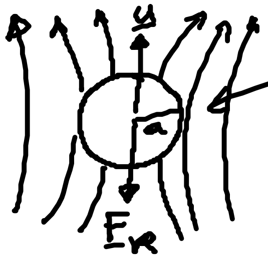
$\longrightarrow$ dominiert durch Reibung

3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

- konstantes T: nur NS-Gln., keine Energiebilanz nötig!
- Motivation:

  (1) hydrodynam. Moden der NS-Gln $\hat{=}$ Störungen um homogenen GG-Zustand

  (2) Stokes Reibung: $\underline{F}_R = -6\pi\eta a \underline{u}$



mit Kugel mit bewegtes stationäres Geschw. profil!

$\longleftrightarrow$ Gültigkeit?

· Zerlegungssatz für Vektorfeld $\underline{v}$: o.B.

> $\underline{v}(\underline{x},t)$ ist bestimmt durch seine Wirbel rot $\underline{v}$, seine Quellen div $\underline{v}$ und ein Anteil $\underline{v}_R$ mit div $\underline{v}_R$ = rot $\underline{v}_R = 0$, um die Randbed. zu erfüllen

a) Wirbel:

· Voraussetzung: $Re \ll 1 \longleftrightarrow$ vernachlässige $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\underline{v}$ } Linearisierung in $\underline{v}$ & ρ

$\rho = \rho_0 + \delta\rho \approx \rho_0$ $\quad\left[\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \to \rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}\right]$

mit rot (3.62) & rot $\underline{\nabla}\ldots = 0$ $\quad$ [für $-\nabla p$ und $\underline{\nabla}(\operatorname{div}\underline{v})$]

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\underline{\nabla}^2\right)\operatorname{rot}\underline{v} = \operatorname{rot}\underline{b}} \qquad (3.72)$$

... Diffusionsgleichung für Wirbel/Vortizität

$\frac{\eta}{\rho_0}$ ... Diffusionskonstante für Wirbel

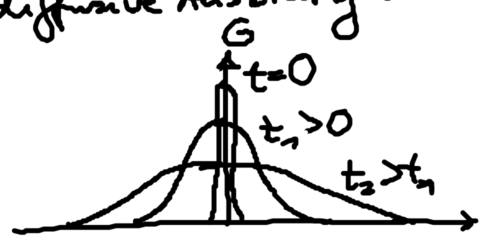
· Greensche Fkt.: $\quad \operatorname{rot}\underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}}, \quad |\hat{\underline{\nu}}| = 1$

... bei $t=0$ initiierte „pkt.förmiger" Wirbel

$\xrightarrow{\text{Lsg. von (3.72)}}$

$$\boxed{\underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{\left(4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t\right)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}} \qquad (3.73)$$

... diffusive Ausbreitung des Pkt. Wirbels



mit $\lim\limits_{t\to 0} \underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \hat{\underline{\nu}}\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$

Normierung: $\int \underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t)\,d^3x = \hat{\underline{\nu}}, \quad t \geq 0$