3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

a) Wirbel:

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2\right)\mathrm{rot}\,\underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{b}} \quad (3.72)$$

... Diffusionsgl. für Wirbel/Vortizität

- Greensche Fkt.:

$$\mathrm{rot}\,\underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{\left(4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t\right)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\eta/\rho_0\, t}}} \quad (3.73)$$

- Folgerung: mittleres Verschiebungsquadrat des Wirbels
  = mittleres Abstandsquadrat der Verwirbelung von $\underline{x}_0$

$$\boxed{\langle(\underline{x}-\underline{x}_0)^2\rangle = \int(\underline{x}-\underline{x}_0)^2\,G(\underline{x}-\underline{x}_0,t)\,d^3(\underline{x}-\underline{x}_0) = 6\,\frac{\eta}{\rho_0}\,t}$$

2 × Raumdimension; Diff.konst.; diffusive Ausbreitung

Beweis: Übungen

hydrodyn. Zeitskala:
mit l_H ... charakt. Länge

$$\longrightarrow \boxed{\tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\rho_0}} \quad (3.76)$$

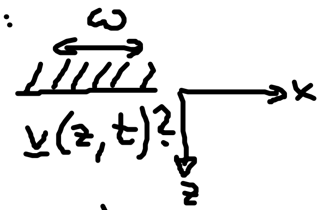
Bsp: $l_H^2 = (1\mu m)^2$, $\eta = 10^{-3}\frac{kg}{ms}$, $\rho_0 = 1\frac{g}{cm^3} = 10^3\frac{kg}{m^3}$

$$\longrightarrow \tau_H = 10^{-7}s\,!$$

- planare Geometrie (1):

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{b} = \delta(z-z_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}} \longleftrightarrow \underline{G}(z-z_0,t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{\sqrt{4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/\rho_0\, t}}} \quad (3.77)$$

· planare Geometrie (2):



$\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x \to \mathrm{div}\,\underline{v} = 0!$, $\quad \underline{b} = 0$ in (3.62)

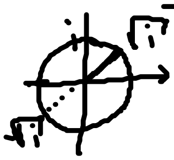
$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(z,t) = 0} \qquad (3.78)$$

Ansatz: $\quad v(z,t) = v(\omega,z)\,e^{i\omega t}$ in (3.78)

$$\longrightarrow \left(i\omega - \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(\omega,z) = 0 \qquad (3.79)$$

$$\longrightarrow v(\omega,z) = v(\omega,0)\,e^{-\sqrt{i\omega\frac{\rho_0}{\eta}}\,z}$$

$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \longrightarrow \quad \boxed{v(\omega,z) = v(\omega,0)\,e^{-(1+i)z/\delta}}$



exp. Abfall Oszillation

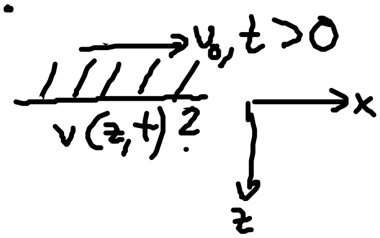
Eindringtiefe der Oszillation: $\quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho_0}}} \quad (3.81)$

$\delta \to \infty, \ \omega \to 0$!!

$\delta \to 0, \ \omega \to \infty$

· planare Geometrie (3):

$\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x$



Randbed.:

(1) $v(0,t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ v_0, & t>0 \end{cases}$

(2) $v(z,0) = 0, \quad z>0$

Lsg.: Superpositionsprinzip! ← Lsg. von (3.78) für $z \neq z_0$

$$v(z,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \; 2\underbrace{\Theta(-z_0)} \, G(z-z_0,t) \quad (3.82)$$

↳ Stufenfunktion: $\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z>0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$

[Überlagerung 1D Punktquellen bei $z_0 < 0$]

denn: erfüllt Randbed.

$$v(0,t) = \underbrace{v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \; 2\Theta(z_0) \, G(-z_0,t)}_{=1} \overset{t>0}{=} v_0 \checkmark$$

– Normierung von G (3.74)
– Symmetrie bzgl. $z_0=0$

$$v(z,0) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \; 2\Theta(-z_0) \, \delta(z-z_0) = v_0 \, 2\Theta(-z) \checkmark$$

also: $v(z,t) \overset{(3.82)}{=} 2v_0 \int_{-\infty}^{0} \underbrace{G(z-z_0,t)}_{=\frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{\eta}{\rho_0} t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/\rho_0 t}}} dz_0$

$u = \frac{z-z_0}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}} \longrightarrow du = -\frac{dz_0}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}$

$$\boxed{v(z,t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}}^{\infty} e^{-u^2} du} \quad (3.84)$$

(1) $z \gg \sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}$: $v(z,t) = 0$

(2) $z \ll$ ″ : $v(z,t) = v_0$

⟶ v_0 bei z spürbar nach $\frac{z^2}{4\eta/\rho_0} \simeq \tau_H$!!

⟶ $\tau > \tau_H$ … Gültigkeitsbereich für stationäres Geschw.profil

• **hydrodynamische Moden:**

Transversalwellen: $\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x$ mit $v(z,t) = v(k,\omega)\, e^{-\xi t + ikz}$

$\underline{e}_x \uparrow \longrightarrow z$

$\xrightarrow{\text{in (3.78)}} \left(-\xi + \frac{\eta}{\rho_0} k^2\right) v(k,\omega) = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\xi(k) = \frac{\eta}{\rho_0} k^2} \quad (3.86)$$

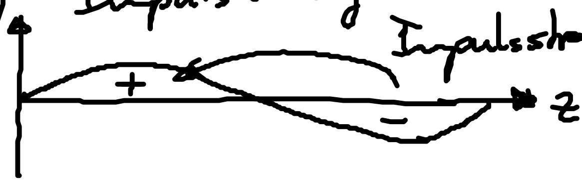
... Dispersionsrelation für Schermoden

ξ^{-1} ... Relaxationszeit für Welle e^{ikz}

'$\xi \to 0$ für $k \to 0$!

„unendliche Lebensdauer" für „hydrodynam. Moden für $k \to 0$

Grund: $\rho v(z,t)$ Impulserhaltung Impulsstrom: $\eta \frac{\partial v}{\partial z}$



b) Quellen:

div $\underline{v} \neq 0 \longrightarrow \underline{v} = v(x,t)\, \underline{e}_x$ ... Longitudinalwelle = Schallwelle

Geschw.: $c = \Big(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial p}\Big|_s}_{\text{isentrope Kompressibilität}}\Big)^{-1/2} \approx 10^3 \frac{m}{s}$ für Flüssigkeit

also: $1\mu m$ in $c^{-1}\, 1\mu m = 1 ns$!
schneller als Scherwelle!

benötigt Masse-/Energiebilanz $\longrightarrow$ Kap. 3.13

3.13 Hydrodynamische Moden

• Motivation:

5 Erhaltungssätze (Masse, Impuls, Energie)

$\longrightarrow$ 5 hydrodynam. Moden

• <u>Weg</u>: (i) linearisiere Bewegungsgln. (3.15), (3.62), (3.65) um homogenen GG-Zustand:

$$\boxed{\begin{aligned} \varrho &\longrightarrow \varrho + \delta\varrho(\underline{x},t) \\ & \qquad \underline{v}(\underline{x},t) \\ T &\longrightarrow T + \delta T(\underline{x},t) \end{aligned}} \qquad (3.87)$$

statt innerer Energie!

(ii) homogener GG-Zustand: ϱ, T

• erster Satz von Bew.glgn.: mit $\underline{b}=0$, $r_w=0$

$$(3.15) \xrightarrow{\varrho \to \varrho + \delta\varrho} \quad \frac{\partial \delta\varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \qquad (3.88)$$

$$(3.62) \xrightarrow[\text{nichtlinear}]{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\underline{v}\ldots} \quad \varrho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta + \eta')\underline{\nabla} \operatorname{div} \underline{v} \qquad (3.89)$$

$$(3.65) \xrightarrow[\text{nichtl.}]{\underline{v}\cdot\underline{\nabla} u} \quad \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = -p \operatorname{div} \underline{v} + \varkappa \nabla^2 T \qquad (3.90)$$

• Zerlegung:

$$\boxed{\underline{v}(\underline{x},t) = \underline{v}_l(\underline{x},t) + \underline{v}_t(\underline{x},t) \quad \text{mit } \operatorname{div} \underline{v}_t = 0, \ \operatorname{rot} \underline{v}_l = 0} \qquad (3.91)$$

longitudinaler Anteil — transversaler Anteil

a) Transversalmoden

• Gleichung für $\underline{v}_t$: wegen $\operatorname{rot} \underline{\nabla} p = 0$ und $\operatorname{div} \underline{v}_t = 0$

$$(3.89) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\varrho}\underline{\nabla}^2\right)\underline{v}_t = 0 \qquad (3.92)$$

• Schermoden: s. Kap. 3.12 & keine Kopplung an $\delta\varrho$, δT!

$$\underline{v}_t = v_t(\underline{k},\xi)\, e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

mit $\underline{v}_t(\underline{k},\xi) \perp \underline{k} \longleftrightarrow \operatorname{div} \underline{v}_t = 0$

in (8.92) $\longrightarrow$ $\boxed{\xi_{1/2}(k) = \frac{\eta}{\varsigma} k^2}$

... 2 Schermoden für
2 $\underline{v}_t(\underline{k},\omega) \perp \underline{k}$!
<u>reine</u> diffusive Moden (<u>keine</u> Propagation)

b) <u>Longitudinalmoden</u>:

- wichtige thermodynam. Relationen: s. Folie