3.13 Hydrodynamische Moden

• Linearisiere:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho \longrightarrow \rho + \delta\rho(\underline{x},t) \\ \qquad\quad \underline{v}(\underline{x},t) \\ T \longrightarrow T + \delta T(\underline{x},t) \end{array}} \qquad (3.87)$$

statt innerer Energie

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho\, \mathrm{div}\, \underline{v} = 0 \qquad (3.88)$$

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta + \eta')\underline{\nabla}\, \mathrm{div}\, \underline{v} \qquad (3.89)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -p\, \mathrm{div}\, \underline{v} + \kappa \underline{\nabla}^2 T \qquad (3.90)$$

b) Longitudinalmoden: $(\mathrm{rot}\, \underline{v}_L = 0)$

• wichtige thermodynam. Relationen: s. Folie

• Umformungen für Bew.gln.: (Größen als Fkt. von T, ρ)

(1) in Impulsbilanz:

$$\underline{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \underline{\nabla} \delta\rho + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial T}}_{-\rho^2 \frac{\partial s}{\partial \rho}\ (3.99)} \underline{\nabla} \delta T \qquad (3.104)$$

(2)
$$\underline{\nabla}^2 \underline{v}_L = \underline{\nabla}\, \mathrm{div}\, \underline{v}_L - \mathrm{rot}\, \underbrace{\mathrm{rot}\, \underline{v}_L}_{=0} = \underline{\nabla}\, \mathrm{div}\, \underline{v}_L \qquad (3.105)$$

(3) in Energiebilanz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\, \mathrm{div}\, \underline{v}_L = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \rho}}\, \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \delta\rho}}_{\overset{(3.10)}{=} \left(\cancel{\frac{p}{\rho^2}} + T\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)(-\rho)\, \mathrm{div}\, \underline{v}_L} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial T}}_{= c_v\ (3.95)} \frac{\partial}{\partial t} \delta T + \cancel{\frac{p}{\rho}\, \mathrm{div}\, \underline{v}_L}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\, \mathrm{div}\, \underline{v}_L = -T\rho \frac{\partial s}{\partial \rho}\, \mathrm{div}\, \underline{v}_L + c_v \frac{\partial}{\partial t} \delta T \qquad (3.106)$$

$$(3.88) \longrightarrow \qquad (3.89) \xrightarrow[\&\ (3.105)]{\text{mit } (3.104)} \qquad (3.90) \xrightarrow[(3.106)]{\text{mit}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \,\mathrm{div}\, \underline{v}_l = 0 && (3.107)\\
&\frac{\partial \underline{v}_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} \nabla \delta\rho - \rho \frac{\partial s}{\partial \rho} \nabla \delta T - \frac{2\eta+\eta'}{\rho} \nabla^2 \underline{v}_l = 0 && (3.108)\\
&\frac{\partial}{\partial t} \delta T - \frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} \,\mathrm{div}\, \underline{v}_l - \frac{\kappa}{\rho c_v} \nabla^2 \delta T = 0 && (3.109)
\end{aligned}}$$

... 3 hydrodynam. Moden aus Kopplung $\delta\rho, \underline{v}_l, \delta T$

- Modenanalyse:

Ansatz ebener Wellen

$$\left.\begin{aligned}
\delta\rho(\underline{x},t) &= \delta\rho(\underline{k},\xi)\, e^{-\xi t + i \underline{k}\cdot \underline{x}}\\
\underline{v}_l(\underline{x},t) &= v_l(\underline{k},\xi) \frac{\underline{k}}{k}\, e^{-\xi t + i \underline{k}\cdot \underline{x}} \quad , \ \mathrm{rot}\, \underline{v}_l = 0\\
\delta T(\underline{x},t) &= \delta T(\underline{k},\xi)\, e^{-\ \text{"}\ \text{"}}
\end{aligned}\right\} \quad (3.110)$$

- mit (3.110) in (3.107–109):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\xi & ik\rho & 0 \\ ik\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & -\xi + k^2 \frac{2\eta+\eta'}{\rho} & -ik\rho\frac{\partial s}{\partial \rho} \\ 0 & -ik\frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} & -\xi + \frac{\kappa}{\rho c_v} k^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}\ \dots\ \text{dynamische Matrix}} \begin{bmatrix} \delta\rho(k,\xi) \\ v_l(k,\xi) \\ \delta T(k,\xi) \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad (3.111)$$

nichttriviale Lsg.: $\boxed{\mathrm{Det}\, \mathcal{D} = 0 \longrightarrow \xi = \xi(k)}$

... Dispersionsrelationen

etwas kompliziert $\longrightarrow$ in Schritten

- <u>ohne Dissipation</u>: $\kappa = \eta = \eta' = 0 \longrightarrow$ keine Dämpfung

(1) Schallwellen:

$$(3.111) \longrightarrow \left.\begin{aligned} \delta T &= -\frac{ik}{\xi}\frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} v_l \\ \delta\rho &= \frac{ik}{\xi}\rho v_l \end{aligned}\right\} \text{ in mittlere Gl. von (3.111)}$$

o.B. $\longrightarrow \quad (\underbrace{\xi^2 + c^2 k^2}_{=0}) v_L = 0$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\xi_{3/4} = \pm i c k \,, \quad c = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho \varkappa_s}}} \quad (3.112)$$

- Schallwelle mit Geschw c: $\quad v_L \underset{\text{EV von } \mathcal{D}}{\underset{\uparrow}{d}} e^{i(\mp c k t + \underline{k} \cdot \underline{x})}$

- $c \sim \frac{1}{\sqrt{\varkappa_s}}$ mit $\varkappa_s$ ... isentrope Kompressibilität

[Beweis: $-\frac{k^2}{\xi} \frac{\partial p}{\partial \rho} - \xi - \frac{k^2}{\xi} \frac{T\rho^2}{c_V} \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)^2 = 0$

$$\longrightarrow \quad \xi^2 = -k^2 \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{T\rho^2}{c_V} \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)^2\right]$$

$$\overset{(3.102)}{=} -k^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{c_p}{c_V} \overset{(3.103)}{=} -k^2 \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s \quad \text{qed} \,]$$

(2) weiterer EV von $\mathcal{D}$:

$$\begin{pmatrix} \delta\rho \\ 0 \\ \delta T \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in } (3.111)} \boxed{\xi_5 = 0} \quad (3.113)$$

$$\frac{1}{\rho} i k \Big(\frac{\partial p}{\partial \rho} \delta\rho - \underbrace{\rho^2 \frac{\partial s}{\partial \rho}}_{\frac{\partial p}{\partial T}} \delta T \Big) \sim dp = 0$$

$\longrightarrow$ statische Mode ($\xi_5 = 0$) mit $dp = 0$

• mit Dissipation:

(2) diffusive Wärmemode:

Ansatz: $\xi_5 = \underbrace{D_T k^2}_{\text{Dämpfg} \sim k^2}$ in Det $\underline{\mathcal{D}} = 0$

& Terme führender Ordg in k $[O(k^4)]$

o.B.: $\quad \left(D_T - \frac{\varkappa}{\rho c_p} \right) k^4 = 0$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\xi_5 = D_T k^2 \quad \text{mit} \quad D_T = \frac{\kappa}{\rho c_p}} \qquad (3.114)$$

- rein diffusive Mode für Wärmeausbreitung

  D_T ... Wärmediffusionskoeffizient
- c_p statt c_v durch Kopplung von $\delta\rho$ bzw $\operatorname{div} v_L$

[Beweis: ....]

(1) propagierende Schallwelle mit Dämpfung:

Ansatz: $\xi_{3/4} = \pm ick + \frac{1}{2}\Gamma k^2$ in $\operatorname{Det} \mathcal{D} = 0$

& Terme in führender Ordnung in k $[O(k^4)]$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \boxed{\begin{aligned} &\xi_{3/4} = \pm ick + \frac{1}{2}\Gamma k^2 \\ &\quad \text{mit} \quad c = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_s}} \\ &\qquad\qquad \Gamma = \underbrace{D_T\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)}_{\text{Wärmediffusion}} + \underbrace{\frac{2\eta + \eta'}{\rho}}_{\text{Volumenviskosität}} \end{aligned}} \qquad (3.115)$$

Dämpfung aufgrund

4. Stokes-Gleichungen

- wichtig für Welt der kleinen Reynoldszahlen
- " für Strömungsfelder auf Mikro-/Nanometerskala, insbesondere Mikro-/Nanofluidik!

· Voraussetzungen:

$$Re = \frac{\varrho a v_0}{\eta} \ll 1 \xrightarrow{(3.68)} \text{vernachlässige } \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}$$

$$\longrightarrow \quad \text{"} \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$$

auf Zeiten $t \gg \tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\varrho}$

$\longrightarrow$ stationäres Geschw.feld auf Länge l_H

$\text{div}\,\underline{v} = 0 \longrightarrow$ inkompressible Flüssigkeiten

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{0} &= -\underline{\nabla} p + \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v} \quad (+\varrho \underline{k}) \\ 0 &= \text{div}\, \underline{v} \end{aligned}} \quad (4.1)$$

sogen. „creeping-flow" Gleichungen

4.1 Extremalprinzip

· wichtiges Prinzip in Physik! [vgl. $\delta S = \delta \int L\, dt = 0$ $\longrightarrow$ Euler-Lagrange-Gl.n]

· hier: dissipierte Energie pro Zeiteinheit $W = T\dot{G}$ für T = konstant

$$\boxed{W \overset{(3.43)}{=} \int Sp\, \underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}}\, d^3x \underset{\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underline{\underline{A}}}{=} 2\eta \int Sp\, \underline{\underline{A}}^2 d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2\, d^3x} \quad (4.2)$$

$[\mathrm{sp}\,\underline{\underline{A}} = 0]$

- Extremalprinzip: unter Nebenbedingung $\operatorname{div} \underline{v} = 0$

$$\boxed{\delta\left(W - 2\int p \operatorname{div} \underline{v}\, d^3x\right) = 0} \longleftrightarrow 0 = -\underline{\nabla} p + \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v} \qquad (4.3)$$

Druck p = Langrangeparameter

Randbedingung:

1. $\underline{v} = 0$ ... haftend
2. $T_{ij} n_j \big|_{\partial V} = 0$

Oberfläche ist Kräfte frei

Beweis: Übung

stationäre Strömungsfelder stellen sich so ein, daß W ein Extremum annimmt!