

4. Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \underline{0} &= -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \quad (+ \underline{g} \underline{e}) \\ 0 &= \operatorname{div} \underline{v} \end{aligned} \quad (4.1)$$

4.2 Biharmonische Gleichung

• Herleitung:

$$\operatorname{div} (\underline{0} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}) \xrightarrow{\operatorname{div} \underline{v} = 0}$$

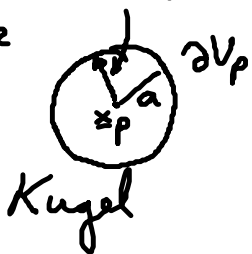
$$\underline{\nabla}^2 (\dots \dots) \xrightarrow{(4.1a)}$$

$$\underline{\nabla}^2 p = 0 \quad (4.4a)$$

$$\underline{\nabla}^2 \underline{\nabla}^2 \underline{v} = 0 \quad (4.4b)$$

NB: separate Gln. für \underline{v} und p !

• Hilfssatz:
Geometrie



Oberflächenintegral: $\underline{v}(\underline{x})$ löse Stokes
Gln. (4.1)

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int_{\partial V_p} \underline{v}(\underline{x}) dS = \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \underline{\nabla}_p^2\right) \underline{v}(\underline{x}_p)$$

(4.5)

• Beweis: verwendet Gl. (4.4b)

$$(1) \text{ Taylor } \xrightarrow{\underline{x} - \underline{x}_p} \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}_p) + \Delta \underline{x}_p \cdot \underline{\nabla}_p \underline{v}(\underline{x}_p) + \frac{1}{2} (\Delta \underline{x}_p \otimes \Delta \underline{x}_p) \cdot (\underline{\nabla}_p \otimes \underline{\nabla}_p) \underline{v}(\underline{x}_p)$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \left((\Delta \underline{x}_p)^n \cdot \underline{\nabla}_p^n \right) \underline{v}(\underline{x}_p)$$

$$(2) \frac{1}{4\pi a^2} \int v(x) df \rightarrow$$

$$(i) \int (\Delta x_p)^n df = 0, \quad n \text{ ungerade}$$

[Δx_p und $-\Delta x_p$ kommen vor]

$$(ii) \int (\Delta x_p \otimes \Delta x_p) df = \frac{4\pi}{3} a^4 \underline{1}$$

dann: $= c \underline{1}$, wegen Isotropie der Oberfläche,
keine Richtung ausgezeichnet

$$\xrightarrow{\text{Sp}(\dots)} 3c = a^2 \int_{2V} df = 4\pi a^4$$

$$\rightarrow c = \frac{4\pi}{3} a^4$$

$$(iii) \int \underbrace{(\Delta x_p \otimes \Delta x_p \otimes \dots)}_{n\text{-mal}} df \sim \underline{1} \xrightarrow{\text{Isotropie}}$$

$$n \geq 4$$

$$\underline{1}^{n/2} = \underline{1} \otimes \underline{1} \otimes \dots$$

in (1)

$$\dots \nabla_p^2 \nabla_p^2 \dots v(x_p) \stackrel{(4.4b)}{=} 0$$

$$(1) \text{ \& } (2) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi a^2} \frac{4\pi}{3} a^4 = \frac{1}{6} a^2 \quad !$$

4.3 Oseen Tensor

• (4.1) \equiv lineare Bgl. in v und $p \rightarrow$ Methode der Green'schen Funktionen
(Superpositionsprinzip!)

\rightarrow Lsg. von (4.1) für vorgegebenes $g^b(x)$:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int d^3x' \underline{Q}(x-x') g^b(x') \\ p(x) &= \int d^3x' g(x-x') \cdot g^b(x') \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit $\underline{Q}(x-x') \dots$ Oseen-Tensor } Green'sche Funktionen
 $g(x-x') \dots$ Druck-Vektor }

NB: (i) $\underline{Q} \dots$ Tensor 2. Stufe

(ii) $g \dots$ Vektor

• Bestimmungsgln. für \underline{Q} und \underline{g} :
 (4.6) in (4.1)

$$\rightarrow \begin{cases} \underline{Q} = \int d^3x' \{ -\underline{\nabla} [g(x-x') \cdot \underline{g}_b(x')] + \gamma \nabla^2 [Q(x-x') \underline{g}_b(x')] \} + \underline{g}_b(x) \\ 0 = \int d^3x' \operatorname{div} [Q(x-x') \underline{g}_b(x')] \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \underline{g}_b(x') \\ = \underline{e} \delta(x') \end{matrix} \begin{cases} \underline{Q} = -\underline{\nabla} [g(x) \cdot \underline{e}] + \gamma \nabla^2 [Q(x) \underline{e}] + \underline{e} \delta(x) \\ 0 = \operatorname{div} [Q(x) \underline{e}] \end{cases}$$

$$\underline{e} \text{ beliebig} \rightarrow \underline{\nabla} \otimes \underline{g}(x) - \gamma \nabla^2 \underline{Q}(x) = \underline{1} \delta(x) \quad (4.7a)$$

$$\operatorname{div} \underline{Q}^t(x) = 0 \quad (4.7b)$$

• Lösung: für $V \rightarrow \infty$, $\underline{v}|_{\partial V} = 0$... unendliches Volumen

(i) Druck-Vektor \underline{g} :

$$\operatorname{div} [(4.7a)^t] \text{ \& } (4.7b)$$

, möchte mit ∇ kontrahieren'

$$\rightarrow \nabla^2 \underline{g}(x) = \underline{\nabla} \delta(x) \quad (4.8)$$

Einschluss: Elektrostrik: $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(x)$, $r = |x|$ (4.9)

↖
Greensche Fkt.
der Poissongl.

$$\underline{\nabla} (4.9) \text{ \& } \text{vgl. } (4.8)$$

$$\rightarrow \underline{g}(x) = -\frac{1}{4\pi} \underline{\nabla} \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{x}{r^3} \quad (4.10)$$

... 'Dipol'

$$\text{Beweis: } \underline{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \underline{\nabla} r = -\frac{x}{r^3} \quad \text{qed}$$

$\hat{x} = \frac{x}{r}$

(ii) Oseen-Tensor \underline{Q} :

$$(4.10) \text{ in } (4.7a)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{4\pi} (\nabla \otimes \nabla) \frac{1}{r} - \eta \nabla^2 \underline{Q}(\underline{x}) = \underline{1} \delta(\underline{x}) \quad (4.11)$$

$$\underline{\text{Ansatz:}} \quad \underline{Q}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\eta} \left(\frac{1}{r} \underline{1} + \underline{\tilde{O}} \right) \quad (4.12)$$

$$\text{in (4.11)} \rightarrow \nabla^2 \underline{\tilde{O}} = -(\nabla \otimes \nabla) \frac{1}{r} \stackrel{\text{O.K.}}{=} \frac{1}{r^3} \underline{1} - 3 \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^5} \quad (4.13)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} = \delta(\underline{x})$$

$$\underline{\text{Ansatz:}} \quad \underline{\tilde{O}} = \frac{1}{r} \left(c_1 \underline{1} + c_2 \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} \right) \text{ in (4.13)}$$

$$\rightarrow \underline{\hat{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{2r} \left(\frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} - \underline{1} \right) \quad (4.14)$$

(4.12) & (4.14)

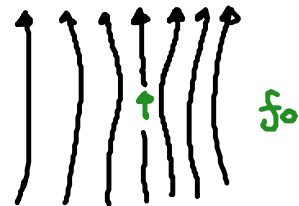
$$\underline{Q}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left(\underline{1} + \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} \right) \quad (4.15)$$

... Oseen-Tensor

• Geschw. feld einer Punktquelle: $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{f}_0 \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$

$$\text{in (4.6)} \rightarrow \underline{v}(\underline{x}) = \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}_0) \underline{f}_0 \quad (4.16)$$

... Stokeslet



Anisotropie:

$$(i) \quad \underline{x} - \underline{x}_0 \parallel \underline{f}_0 \rightarrow \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{4\pi\eta r}$$

$$(ii) \quad \underline{x} - \underline{x}_0 \perp \underline{f}_0 \rightarrow \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{8\pi\eta r}, \quad r = |\underline{x} - \underline{x}_0|$$

NB: allgemein: $\underline{v}(\underline{x}) \equiv$ Superposition von Stokeslets

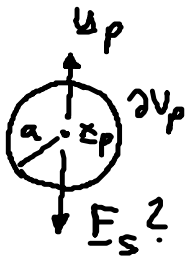
• wichtige Anwe. lg.: hydrodynamische Wechselwirkungen (HW)
s. Kap. 6

4.4 Stokes Reibung

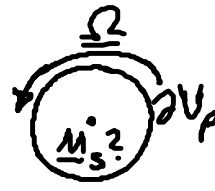
• 2 Standard situationen:

(i) linear bewegte Kugel

(ii) rotierende Kugel



Reibungskraft $F_s?$



Reibungsdrehmoment $M_s?$

Berechne $\underline{v}(\underline{x}), p(\underline{x}) \longrightarrow \underline{I} \longrightarrow \underline{F}_s, \underline{M}_s$

a) Translation

• Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } \underline{v}(\underline{x}) \longrightarrow 0, \quad r = |\underline{x}| \longrightarrow \infty \\ \text{(ii) } \underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}_p, \quad \underline{x} \in \partial V_p \end{array} \right\} (4.17)$$

• 1. Weg: mit $\underline{Q}(\underline{x}-\underline{x}')$

Ansatz: Oberflächenkraftdichte von Kugel auf Flüssigkeit

$$\underline{g}^k(\underline{x}') \Big|_{\underline{x}' \in \partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2} \underline{u}_p \quad (4.18)$$

... konstant auf ∂V_p !!!

$$\longrightarrow \underline{v}(\underline{x}) \stackrel{(4.6)}{=} \frac{c}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underbrace{\underline{Q}(\underline{x}-\underline{x}')}_{\substack{\text{Lsg. der Stokes Gl.} \\ \text{für } \underline{x}-\underline{x}' \neq 0}} \underline{u}_p d\mathcal{f}' \quad (4.19)$$

$$\text{mit } \underline{Q}(\underline{x}-\underline{x}') = \underline{Q}(\underline{x} - (\underline{x}_p + \Delta \underline{x}_p))$$

& Hilfsatz (4.5)

$$\longrightarrow \underline{v}(\underline{x}) = c \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2 \right) \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}_p) \underline{u}_p$$

$$\text{RB: (4.17) (ii) } \stackrel{(4.19)}{\longrightarrow} c = 6\pi\eta a \quad (4.20)$$

$$\underline{v}(\underline{x}) \Big|_{\partial V_p} = \underline{u}_p$$

⇒

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x} - \underline{x}_p) u_p$$

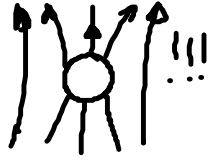
mit $\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{x}) = 6\pi\eta a \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla^2\right) \underline{Q}(\underline{x})$ (4.21)

$$\text{o. B. } \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{3}{4} \frac{a}{r} \left(1 + \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(1 - 3 \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2}\right)$$

NB: für $r \gg a$: $\underline{v}(\underline{x}) \approx \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}_p) \underbrace{6\pi\eta a}_{F = -F_s!} u_p$

... Stokeslet!

s.u.



- 2. Weg: löse (4.1) direkt → $\underline{v}(\underline{x}), p(\underline{x})$ [s. Übung]

- Stokesche Reibungskraft:

1. Weg: $\underline{F}_s = \oint_{\text{reaction}} \underline{g} \underline{b}(\underline{x}) d\underline{f} \stackrel{(4.18)}{=} -c u_p \underbrace{\int \frac{d\underline{f}}{4\pi a^2}}_{=1}$

a dia = 2u_p

→ $\underline{F}_s = -6\pi\eta a u_p$ (4.22)

.... gültig für $t \gg \tau_H = \frac{a^2}{6\eta/g}$!

2. Weg: $\underline{v}(\underline{x}), p(\underline{x}) \rightarrow \underline{I} = -p \underline{1} + 2\eta \underline{\underline{\Delta}}$

→ $\underline{F}_s = \int_{\partial V_p} \underline{I} d\underline{f}$ [etwas Arbeit!]