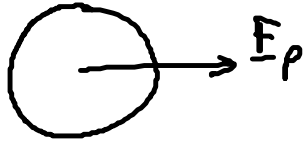


4.4 Stokes Reibung

a) Translation:

$$\underline{F}_s = -\underbrace{6\pi\eta a}_{\gamma} \underline{u}_p \quad (4.22)$$

• Brown'sche Zeitskala τ_B :



$$\underline{u}_p(t=0) = \underline{0}$$

(4.23)

Bew. gl.: $m \frac{d\underline{u}_p}{dt} = \underline{F}_p + \underline{F}_s \rightarrow m \dot{\underline{u}}_p + \gamma \underline{u}_p = \underline{F}_p, \quad \gamma = 6\pi\eta a$

o.B. \rightarrow

$$\underline{u}_p = \frac{\underline{F}_p}{\gamma} (1 - e^{-t/\tau_m}) \quad (4.24)$$

mit $\tau_m = \frac{m}{\gamma} = \frac{2}{9} a^2 \frac{\rho_p}{\eta}$

$$m = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_p$$

$$\gamma = 6\pi\eta a$$

vgl. $\tau_H = \frac{1}{6} a^2 \frac{\rho_p}{\eta}$

Bsp: $\rho_p = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad a = 1 \mu\text{m}, \quad \eta = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}} \rightarrow \tau_m \approx \frac{2}{9} 10^{-6} \text{s}$

\rightarrow Impulsrelaxation vernachlässigbar auf Zeitskala

$$\tau_B \gg \tau_H \geq \tau_m \quad (4.25)$$

dann gilt: $\underline{u}_p(t) = \frac{1}{\gamma} \underline{F}_p(t) \quad (4.26)$

NB: (4.23) nicht konsistent, weil auf Zeiten $z_m = \tau_H$

keine stationäre Strömung existiert \rightarrow $y \ll y_p$ nicht gültig

\rightarrow besser: $\int_{-\infty}^t y(t-t') u_p(t') dt'$ Kausalität $\int_{-\infty}^{\infty} y(t-t') u_p(t') dt'$

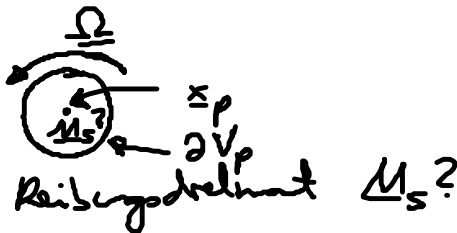
Gedächtnisfunktion $= 0, t' > t$

FT
Faltungssatz $y(\omega) u_p(\omega) = F_p(\omega)$

frequenzabhängiger Reibungskoeffizient
 $\leftarrow \omega$

$u_p(t) = u_p(\omega) e^{i\omega t}$
 $\rightarrow F_p(\omega)$

b) Rotation:



- Randbed.: (i) $v(x) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$
- (ii) $v(x) = \underline{\Omega} \times (x - x_p), x \in \partial V_p$

• 1. Weg: $g^b(x) \Big|_{\partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2} \underline{\Omega} \times (x - x_p)$

Integral: $v(x) = \frac{c}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underline{\Omega} (x-x') [\underline{\Omega} \times (x' - x_p)] df'$

RB(ii): $c = 12\pi\gamma a$

$\rightarrow v(x) = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\Omega} \times (x - x_p) \sim \frac{1}{r^2}, r = |x - x_p|$ (4.27)

2. Weg: s. Übungen

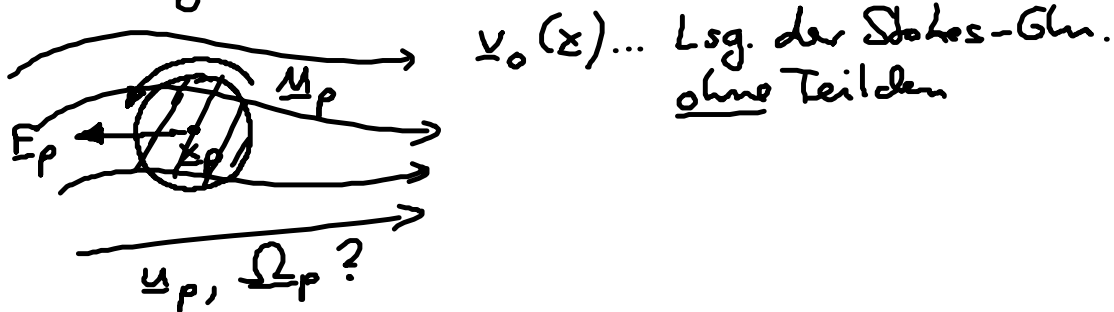
• Stokes'sche Drehmoment:

$M_s = - \int_{\partial V_p} [(x - x_p) \times g^b(x)] df$

a.B. $\rightarrow M_s = -8\pi\gamma a^3 \underline{\Omega}$ (4.28)

4.5 Faxén - Theorem

- tiefe Einsicht, nur für kugelförmige Teilchen
- Problemstellung:



- Geschw. der Teilchenoberfläche: $x \in \partial V_p$

$$u_p + \underbrace{\Omega \times (x - z_p)}_{(i)} = \underbrace{v_0(x)}_{(iv)} + \underbrace{\int_{\partial V_p} \underline{Q}(x-x') \underline{g}_b(x') df'}_{(ii), (iii)} \quad (4.29)$$

Oberflächenkraftdichte von Teilchen auf die Flüssigkeit.

o. B. d. A., $\underline{g}_b(x')$ stellt sich so ein, daß (4.29) gilt.

Betrachte: $\frac{1}{4\pi a^2} \int_{\partial V_p} (4.29) df$

→ (i) $\int_{\partial V_p} (x - z_p) df = 0!$ (4.30)

(ii) $\frac{1}{4\pi a^2} \int_{\partial V_p} df \underline{Q}(x-x')$, $x, x' \in \partial V_p$

$\stackrel{!}{=} c \underline{1}$ (4.31)
Isotropie

$\xrightarrow[\text{(4.15)}]{\text{Sp (4.31)}}$

$\underline{Q}(x) = \frac{1}{8\pi \eta a} \left(1 + \frac{x \otimes x}{r^2} \right)$

$3c = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{4}{8\pi \eta} \int_{\partial V_p} \frac{df}{|x-x'|}$ Kugel-
Koord $\frac{1}{2\pi \eta a}$
 $x' = z - a e_x$

$$\rightarrow \frac{1}{4\pi a^2} \int df \underline{0} (\underline{x}-\underline{x}') = c \underline{1} = \frac{1}{6\pi\eta a} \underline{1} \quad (4.32)$$

$$(iii) \frac{1}{6\pi\eta a} \int df' g^b(\underline{x}') = \frac{1}{6\pi\eta a} F_p \quad (4.33)$$

$$(iv) \frac{1}{4\pi a^2} \int \underline{v}_0(\underline{x}) df \stackrel{(4.5)}{=} \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{v}_0(\underline{x}_p)$$

(i) - (iv) in (4.29)

$$\rightarrow \underline{u}_p = \frac{1}{6\pi\eta a} F_p + \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{v}_0(\underline{x}_p) \quad (4.35)$$

... Faxén-Theorem für Translation

$$(i) \underline{v}_0(\underline{x}) = \underline{0} \rightarrow \text{Stokes (4.22)}$$

$$F_p = -F_s$$

(ii) kraftfreies Teilchen:

$$F_p = 0 \rightarrow \underline{u}_p = \underline{v}_0(\underline{x}_p) + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2 \underline{v}_0(\underline{x}_p) !$$

(iii) wichtig für Störungsreihe für HW [s. Kap. 6] !!!

• Faxén-Theorem für Rotation: $\left[\int (\underline{x}-\underline{x}_p) \times (4.29) df \rightarrow \dots \right]$

$$\underline{\Omega}_p = \frac{1}{8\pi\eta a^3} \underline{M}_p + \frac{1}{2} \nabla_p \times \underline{v}_0(\underline{x}_p) \quad (4.36)$$

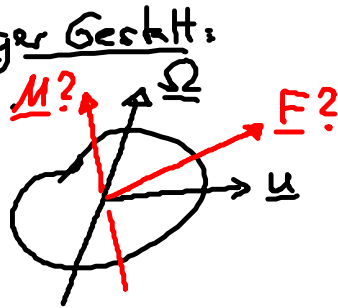
Vortex in Strömung! (vgl. Gl. (3.9))

4.6 Hydrodynamische Reibung von Teilchen

• in Kap. 4.4: Stokes-Reibung von Kugel

a) Teilchen beliebiger Gestalt:

• Fragestellung:



Geg: $\underline{u}, \underline{\Omega} \rightarrow$ Ges: äußere Kraft \underline{F} , Drehmoment \underline{M}

• Stokes'sche Gln. linear in $\underline{v} \rightarrow$ lineare Veriehung:

$$\begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\beta} & \underline{C} \\ \underline{C}^t & \underline{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Bem: (i) $\left. \begin{matrix} \underline{\beta} \\ \underline{B} \end{matrix} \right\}$ Reibungstensor für $\begin{cases} \text{Translation} \\ \text{Rotation} \end{cases}$

(ii) $\underline{C} \dots$ Kopplungstensor für Translation und Rotation

(iii) Es gilt: $\underline{\beta}^t = \underline{\beta}, \underline{B} = \underline{B}^t, \underline{C} \text{ und } \underline{C}^t$ (4.38)

Beweis: im Prinzip Onsager'sche Reziprozitätsrelation (s. Kap. 2.8.6)

Stokes-Gln: Spezielles Reziprozitätskriterium

(iv) $\underline{\beta}, \underline{B}, \underline{C}$ müssen Symmetrie des Teilchens widerspiegeln

(v) Bsp: Kugel: (vgl. Kap. 4.4.)

$$\underline{\beta} = 6\pi\eta a \underline{1}, \quad \underline{B} = 8\pi\eta a^3 \underline{1}, \quad \underline{C} = \underline{0}$$

Beweis: $\underline{C} = \underline{0}$

(1) $\underline{\underline{C}}$... Pseudotensor 2. Stufe

$\hat{=} \underline{\underline{C}} \rightarrow -\underline{\underline{C}}$ unter Raumspiegelung

am Ursprung ($\underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{1}}$)

Grd: polare Vektoren: $\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{u}} \xrightarrow{\underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{1}}} -\underline{\underline{F}}, -\underline{\underline{u}}$
Pseudo } vektoren $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{\Omega}} \xrightarrow{\underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{1}}} \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{\Omega}}$
axiale }

$\rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$

(2) Symmetriegruppe der Kugel: $O(3)$

$$[\underline{\underline{C}} \sim \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}]$$

\uparrow
 $\underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{1}}$

• dissipierte Energie pro Zeiteinheit:

$$W = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}$$

$$\stackrel{(4.37)}{=} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{F}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Omega}} + 2 \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Omega}}$$

(4.40)

• $\underline{\underline{\Omega}}, \underline{\underline{M}}$ relativ zu Pkt. gewählt \rightarrow

führe ein: Reaktionszentrum, so daß

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^t$$

(4.41)