7.3 Modellierung des einarmigen Schwimmers

s. Folien

8. Die Brownsche Bewegung: DER stochastische Prozeß

- Motivation:
  - (i) Beispiel an dem Theorie der stochastischen Prozesse entwickelt wurde
  - (ii) Illustration der Grundkonzepte, Details dann in Kap. 10 & 11

8.1 Historie

- 1827: Robert Brown: beobachtet Samenkörner in Wasser gelöst/suspendiert (unterm Mikroskop)

→ irreguläre Bewegung
organischer Ursprung der Bewegung wurde ausgeschlossen

- 1905: erste Erklärung durch Einstein: Ann. Phys. (Leipzig) 17, 549 (1905)
  „Über die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen"

Einstein: irreguläre Bewegung aufgrund von Stößen der Flüssigkeitsmoleküle, die statistisch unabhängig voneinander erfolgen

theoretische Beschreibung
→ Kap. 8.3

- 1906: parallele Beschreibung durch Smoluchowski, formale Ausarbeitung der Konzepte
- 1906: alternative Theorie durch Langevin

8.2 Die Langevin-Gleichung: eine stochastische Differentialgleichung

- hier: erster Zugang, Ausarbeitung in Kap. 10 & 11
- Bewegungsgleichung für suspendierte Teilchen (1D):

$$m\ddot{x} = \underbrace{-\gamma \dot{x}}_{\substack{\text{Reibungs-}\\ \text{kraft}\\ \gamma = 6\pi\eta a}} + \underbrace{\Gamma(t)}_{} \quad (8.1)$$

Zufalls-/stochastische Kraft durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle

hier: thermischer Ursprung durch Wärmebewegung der Fl. moleküle
statistische Beschreibung und Stärke von Γ
$\longrightarrow$ Kap. 10

Verallgemeinerung: nicht thermischer Ursprung
$\longrightarrow$ Kap. 11

Bsp: aktive Brownsche Teilchen
= Teilchen mit innerem Antrieb & stochastischer Kraft

- Berechnung von Mittelwerten: $\langle \ldots \rangle$

Mittelung über verschiedene Realisierungen von Γ $\longrightarrow$ unterschiedliche Teilchentrajektorien

(i) mittlerer Ort $\langle x \rangle$:

$$\langle (8.1) \rangle \longrightarrow m \frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle = -\gamma \frac{d}{dt}\langle x \rangle + \underbrace{\langle \Gamma \rangle}_{=0} \quad (8.2)$$

$=0$, da $\Gamma = \pm f$ gleich wahrscheinlich

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\langle x \rangle = x_\infty \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \\ &\text{mit } \langle x \rangle = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ x_\infty, & t \to \infty \end{cases} \end{aligned}} \quad (8.3)$$

$$\boxed{\tau = \frac{m}{\gamma}} \quad (8.4)$$

... Impulsrelaxationszeit!

(ii) mittlere quadratische Verschiebung $\langle x^2 \rangle$:

Berechne: $\langle (8.1)\, x \rangle \longrightarrow m \underbrace{\langle x\ddot{x} \rangle}_{= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2 \rangle - \langle \dot{x}^2 \rangle} + \gamma \underbrace{\langle x\dot{x} \rangle}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle} = \underbrace{\langle x\,\Gamma(t) \rangle}_{=0}$

$\Gamma = \pm f$ gleich wahrscheinlich, unabhängig von x!

verwende: $\boxed{\frac{m}{2}\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}}$

... Gleichverteilungssatz

$\hat{=}$ Info über „Stärke von Γ"

$$\longrightarrow \frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2 \rangle + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = k_B T \quad (8.6)$$

$$\longrightarrow \langle x^2 \rangle = \underbrace{x_\infty^2 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}_{\text{Lsg. der homogenen Gl.}} + \underbrace{\frac{2 k_B T}{\gamma}\, t}_{\text{partikuläre Lsg. von (8.6)}} \quad (8.7)$$

$$\langle x^2 \rangle_0 = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ x_\infty^2, & t \to \infty \end{cases}$$

„Bewegung durch Impulsrelaxation"

$$\xrightarrow{t \gg \tau} \quad \boxed{\langle x^2 \rangle = 2 D t} \quad (8.8) \quad \text{mit} \quad \boxed{D = \frac{k_B T}{\gamma}}$$

... diffusive Bewegung

... Einsteinrelation

Bsp: für Fluktuations (D)
- Dissipations (γ)
- Theorem