11.3 Stochastische Differentialgleichung II

- verschiedene Interpretationen der SDG:

Erinnerung: $$x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x,t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} g(x,t')\,dW(t') \qquad (11.5)$$

(i) Ito-Interpretation: $\quad$ (11.5) mit $\tau = dt \to 0$, $t' = t$

$$\longrightarrow \; x(t+dt) = x(t) + h(x,t)\,dt + \underbrace{g(x,t)}_{\text{zur Anfangszeit } t\,!!\ \hat{=}\ \text{Ito!}}\,dW(t)$$

Führe ein:

wegen $$\langle dW^2(t)\rangle = \langle [W(t+dt) - W(t)]^2 \rangle \overset{(11.4)}{=} t + dt + t - 2t = dt$$

$$\boxed{dW(t) = dw\,\sqrt{dt}} \qquad (11.11)$$

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= x(t+dt) - x(t) \\ &= h(x,t)\,dt + g(x,t)\,dw\,\sqrt{dt} \\ \text{mit } & \langle dw\rangle = 0 \\ & \langle d^2w\rangle = 1 \end{aligned}} \qquad (11.12)$$

... SDG in Ito-Interpretation

Bem: dw ... Gaußsche Zufallsvariable, Varianz 1

$\langle \ldots \rangle$ aus (11.4) mit (11.11)

(ii) Stratonovich Interpretation:

Schreibe formal:

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t)\,dt + g(x,t) \circ dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw\rangle &= 0 \\ \langle dw^2\rangle &= 1 \end{aligned}} \qquad (11.13)$$

verwende Stratonovich-Regel

... SDG in Stratonovich-Interpretation

Berechne: [mit $dW = dw\sqrt{dt}$]

$$g(x,t)\circ dW(t) = g\left(\frac{x(t)+x(t+dt)}{2}, \frac{t+t+dt}{2}\right)dW(t) = g\left(x(t)+\frac{dx}{2}, t+\frac{dt}{2}\right)dW(t)$$

$x(t)+dx$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \left[g(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x,t} dx + \dots\right] dW(t) + O(dt^{3/2})$$

Terme bis $\sim dt$

mit $dx \approx g(x,t)\,dW + O(dt)$

$$= g(x,t)\,dW(t) + \underbrace{\frac{1}{2} g \frac{\partial g}{\partial x} \underbrace{dW^2(t)}_{\text{"="}\, dt \;\dots\; \text{"im quadrat. Mittel"}}}_{\text{weiterer Driftterm}} + O(dt^{3/2}) \qquad (11.14)$$

Beachte: $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ bei x,t

also: (11.13) mit (11.14) rauschinduzierter Drift

$$\longrightarrow \boxed{dx(t) = \left[h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right]dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt}} \qquad (11.15)$$

... SDG in Stratonovich-Interpretation

aber: in Ito-Form!

- Kramers-Moyal-Koeffizienten:

„Signaturen einer SDG"!

$$D^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\langle [x(t+\tau)-x]^n\rangle \qquad (11.16)$$

(i) Ito-SDG: lese direkt von (11.12) ab

$$\xrightarrow{n=2} \quad (dx)^2 = g^2 dw^2 dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \qquad (11.17)$$

(ii) <u>Stratonovich-SDG:</u> aus (11.15) $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \\ D^{2}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \qquad (11.18)$$

- mehrdimensionale SDG: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x}_i = h_i(\underline{x},t) + g_{ij}(\underline{x},t)\, \Gamma_j(t) \\ &\text{mit } \langle \Gamma_j(t) \rangle = 0, \ \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = \delta_{ij}\, \delta(t-t') \end{aligned}} \qquad (11.19)$$

(i) <u>Ito-Interpretation:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &dx_i(t) = h_i(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t)\, dw_j \sqrt{dt} \\ &\quad \text{mit } \langle dw_i \rangle = 0 \\ &\qquad\quad \langle dw_i\, dw_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\longrightarrow D_i^{(1)}(\underline{x},t) = h_i(\underline{x},t) \\ &\qquad D_{ij}^{(2)}(\underline{x},t) = \frac{1}{2} g_{ik}(\underline{x},t)\, g_{jk}(\underline{x},t) \end{aligned}} \qquad (11.20)$$

(ii) Stratonovich-Interpretation [o.B.]

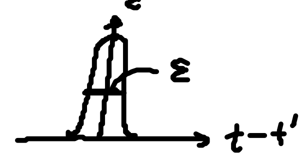
$$dx_i(t) = h_i(x,t)dt + g_{ij}(x,t) \circ dw_j \sqrt{dt}$$
$$\longrightarrow dx_i(t) = D_i^{(1)}(x,t)dt + g_{ij}(x,t)\, dw_j \sqrt{dt}$$
mit $\langle dw_i \rangle = 0$
$$\langle dw_i dw_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (11.21)$$
$$\longrightarrow D_i^{(1)}(x,t) = h_i(x,t) + \frac{1}{2} g_{kj}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(x,t)$$
$$D_{ij}^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2} g_{ik}(x,t) g_{jk}(x,t)$$

• Anwendung der verschiedenen Interpretationen:

(i) physikalische Prozesse mit Korrelationen auf kleiner Zeitskala ε:

also: idealisiert $\langle \Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta(t-t')$, $t-t' > \varepsilon$

Realität: $\langle \Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$, $\forall\, t-t'$



$\longrightarrow$ Stratonovich-Interpretation!

Warum? vgl. Bedingung von $D^{(1)}$ in Kap. 10.3:

(1) $A = \left\langle \int_t^{t+\tau} \int_t^{t'} \Gamma(t')\Gamma(t'')dt''dt' \right\rangle = \frac{\tau}{2}$

mit

$\langle \Gamma(t')\Gamma(t'')\rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$

(2) über Wiener Prozeß:

$$A_S = \left\langle \int_t^{t+\tau} \int_t^{t'} dW(t'')\, dW(t') \right\rangle$$

$$= \left\langle \int_t^{t+\tau} [W(t') - W(t)]\, dW(t') \right\rangle$$

$$\overset{(11.9)}{=} \left\langle \frac{W^2(t+\tau) - W^2(t)}{2} - W(t)[W(t+\tau) - W(t)] \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(t+\tau-t) - t + t = \frac{\tau}{2}$$

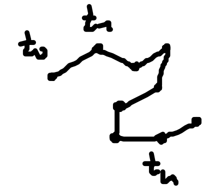
also: $A = A_S = \frac{I}{2}$

aber $A_I = 0$! (→ Integral $= 0$, Gl. (11.8))

(ii) Biologie: oft diskrete Prozesse → Ito-Interpretation

(iii) Analyse von Zeitreihen:

Bsp: Zufallsweg eines Mikroorganismus:



→ $x(t_i)$, $i = 0, \dots$

verwende einfachere Ito-Interpretation!

• Beispiel:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x}_i + \gamma_{ij} x_j = \Gamma_i(t) \quad , \qquad i = 1, \dots, N \\ \langle \Gamma_i(t) \rangle = 0 \, , \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = q_{ij} \, \delta(t - t') \, , \quad q_{ij} = q_{ji} \end{array}} \qquad (11.22)$$

... Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Bem: (1) lineare SDG

(2) q_{ij} ... Stärke des Rauschens

(3) $N = 1$, $x \to v$ ... 1D - Brownsche Bewegung mit Trägheit

(4) $\gamma_{ij} = 0$ ... Wiener-Prozeß!

Lösungen ... s. H. Risken, The Fokker-Planck Equation (Springer)

11.4 Die Fokker-Planck-Gleichung

• Motivation: DGl. für $P(x,t)$

mit $P(x,t)dx$ ... Wahrscheinl. System zur Zeit t in $[x, x+dx]$ anzutreffen

→ Berechnung von Momenten und Zeitkorrelationsfunktionen

≙ Meßgrößen des stochast. Prozesses

a) Kramers – Moyal – Entwicklung:

- Führe ein: Propagator = bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(x, t+\tau \,|\, x', t) \ \dots \ \text{für } x \text{ bei } t+\tau, \text{ wenn } x' \text{ bei } t \text{ mit Sicherheit vorliegt}} \qquad (11.23)$$

damit: $$P(x, t+\tau) = \int P(x, t+\tau \,|\, x', t)\, P(x', t)\, dx' \qquad (11.24)$$

NB. Markov – Prozeß! $P(x,t)$ hängt nur von unmittelbarer Vergangenheit ab!

- Ziel: Gl. für $\frac{\partial P}{\partial t}$!

(i) Berechne:

neue Variable: $x' \to \Delta$, $\Delta = x - x'$

$$P(x, t+\tau)(x', t)\, P(x', t) = P(x+\Delta-\Delta, t+\tau \,|\, x-\Delta, t)\, P(x-\Delta, t) \qquad (11.25)$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Delta^n \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n}_{\text{feste Verschiebung}} [\underbrace{P(x+\Delta, t+\tau \,|\, x, t)}_{\text{neue Fkt. in } x \text{ mit } \Delta \text{ als Index!}}\, P(x,t)]$$

(ii) also:

$$P(x, t+\tau) \stackrel{(11.24)}{=} \int (11.25)\, dx'$$

$$\text{mit} \int_{-\infty}^{\infty} \dots dx' \underset{\substack{\Delta = x-x' \\ d\Delta = -dx' \\ x \text{ fest}}}{=} -\int_{\infty}^{-\infty} \dots d\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\Delta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{\int \Delta^n P(x+\Delta, t+\tau \,|\, x, t)\, d\Delta}_{n\text{.tes Moment: } \langle \underbrace{[x(t+\tau)-x(t)]}_{\Delta}{}^n \rangle}\, P(x,t)\Big]$$

insbes.: $\langle [\dots]^0 \rangle = \langle 1 \rangle = 1$! Normierung!

$$\longrightarrow P(x, t+\tau) = \underbrace{P(x,t)}_{\text{von } n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{\frac{\langle [x(t+\tau)-x(t)]^n \rangle}{n!}}_{= D^{(n)}(x,t)\,\tau + O(\tau^2)} P(x,t)\Big]$$

... Kramers-Moyal-Koeff. (10.26)

mit $\frac{P(x,t+\tau)-P(x,t)}{\tau} \xrightarrow[\tau\to 0]{} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = L_{KM}(x,t)\; P(x,t) \\ &\quad \text{mit } L_{KM} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left[D^{(n)}(x,t) \ldots\right] \end{aligned}} \qquad (11.26)$$

... Kramers-Moyal-(Vorwärts)-Entwicklg

≙ „propagiert vorwärts in der Zeit"

<u>NB:</u> Propagator $P(x,t\,|\,x',t')$ ... Lsg. von (11.26) mit

Anfgsbedingung $P(x,t') = \delta(x-x')$!