11.3 Stochastische Differentialgleichung II

· verschiedene Interpretationen der SDG:

Erinnerung: $x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x,t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} g(x,t')\,dW(t')$ (11.5)

(i) Ito-Interpretation: (11.5) mit $\tau = dt \to 0$, $t' = t$

$\longrightarrow x(t+dt) = x(t) + h(x,t)\,dt + \underbrace{g(x,t)}_{\text{zur Anfangszeit } t\,!!}\,dW(t)$ $\hat{=}$ Ito!

Führe ein:

wegen $\langle dW^2(t)\rangle = \langle [W(t+dt) - W(t)]^2\rangle$

$\overset{(11.4)}{=} t + dt + t - 2t$

$= dt$

$$\boxed{dW(t) = dw\sqrt{dt}} \quad (11.11)$$

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= x(t+dt) - x(t) \\ &= h(x,t)\,dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt} \\ \text{mit} \quad &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle d^2w\rangle = 1 \end{aligned}} \quad (11.12)$$

... SDG in Ito-Interpretation

Bem.: dw ... Gaußsche Zufallsvariable, Varianz 1

$\langle \ldots \rangle$ aus (11.4) mit (11.11)

(ii) Stratonovich-Interpretation:

Schreibe formal:

$$\boxed{\begin{aligned} &dx(t) = h(x,t)\,dt + g(x,t) \circ dw\sqrt{dt} \\ &\text{mit } \langle dw\rangle = 0 \\ &\phantom{\text{mit }} \langle dw^2\rangle = 1 \end{aligned}} \quad (11.13)$$

$\circ$ … verwende Stratonovich-Regel

… SDG in Stratonovich-Interpretation

Berechne: [mit $dW = dw\sqrt{dt}$]

$$g(x,t)\circ dW(t) = g\Big(\frac{\overbrace{x(t)+x(t+dt)}^{x(t)+dx}}{2}, \frac{t+t+dt}{2}\Big)dW(t) = g\Big(x(t)+\frac{dx}{2}, t+\frac{dt}{2}\Big)dW(t)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \Big[g(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x,t} dx + \dots\Big] dW(t) + O(dt^{3/2})$$

Terme bis $\sim dt$

mit $dx \approx g(x,t)\,dW + O(dt)$

$$= g(x,t)\,dW(t) + \underbrace{\frac{1}{2} g \frac{\partial g}{\partial x} \underbrace{dW^2(t)}_{\text{"="}\,dt \;\dots\; \text{"im quadrat. Mittel"}}}_{\text{weiterer Driftterm}} + O(dt^{3/2}) \quad (11.14)$$

Beachte: $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ bei x,t

also: (11.13) mit (11.14) $\underbrace{\text{rauschinduzierter Drift}}$

$$\longrightarrow \boxed{dx(t) = \Big[h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\Big]dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt}} \quad (11.15)$$

… SDG in Stratonovich-Interpretation

aber: in Ito-Form!

- Kramers-Moyal-Koeffizienten:

„Signaturen einer SDG"!

$$D^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\langle[x(t+\tau)-x]^n\rangle \quad (11.16)$$

(i) Ito - SDG: lese direkt von (11.12) ab

$$(dx)^2 = g^2 dw^2 dt \xrightarrow{n=2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \qquad (11.17)$$

(ii) Stratonovich - SDG: aus (11.15) $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \\ D^{2}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \qquad (11.18)$$

- mehrdimensionale SDG: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x}_i = h_i(\underline{x},t) + g_{ij}(\underline{x},t)\, \Gamma_j(t) \\ &\text{mit } \langle \Gamma_j(t) \rangle = 0, \ \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = \delta_{ij}\, \delta(t-t') \end{aligned}} \qquad (11.19)$$

(i) Ito-Interpretation:

$$\boxed{\begin{aligned} &dx_i(t) = h_i(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t)\, dw_j \sqrt{dt} \\ &\quad \text{mit} \quad \langle dw_i \rangle = 0 \\ &\qquad\qquad \langle dw_i dw_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\longrightarrow D_i^{(1)}(\underline{x},t) = h_i(\underline{x},t) \\ &\qquad\ D_{ij}^{(2)}(\underline{x},t) = \frac{1}{2} g_{ik}(\underline{x},t)\, g_{jk}(\underline{x},t) \end{aligned}} \qquad (11.20)$$

(ii) Stratonovich-Interpretation [o.B.]

$$dx_i(t) = h_i(x,t)\,dt + g_{ij}(x,t)\circ dw_j\sqrt{dt}$$

$$\longrightarrow \quad dx_i(t) = D_i^{(1)}(x,t)\,dt + g_{ij}(x,t)\,dw_j\sqrt{dt}$$

mit $\langle dw_i\rangle = 0$

$\langle dw_i\, dw_j\rangle = \delta_{ij}$ (11.21)

$$\longrightarrow \quad D_i^{(1)}(x,t) = h_i(x,t) + \frac{1}{2} g_{kj}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(x,t)$$

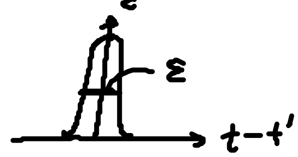
$$D_{ij}^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2} g_{ik}(x,t)\, g_{jk}(x,t)$$

- Anwendung der verschiedenen Interpretationen:

(i) physikalische Prozesse mit Korrelationen auf kleiner Zeitskala ε:

also: idealisiert $\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta(t-t')$, $t-t' > \varepsilon$

Realität: $\langle\Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$, $\forall\, t-t'$



$\longrightarrow$ Stratonovich-Interpretation!

Warum? vgl. Bedingung von $D^{(1)}$ in Kap. 10.3:

(1) $$A = \left\langle \int_t^{t+\tau}\int_t^{t'} \Gamma(t')\Gamma(t'')\,dt''\,dt'\right\rangle = \frac{\tau}{2}$$

mit $\langle\Gamma(t')\Gamma(t'')\rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$

(2) über Wiener Prozeß:

$$A_S = \left\langle \int_t^{t+\tau}\int_t^{t'} dW(t'')\,dW(t')\right\rangle$$

$$= \left\langle \int_t^{t+\tau} [W(t')-W(t)]\,dW(t')\right\rangle$$

$$\overset{(11.9)}{=} \left\langle \frac{W^2(t+\tau)-W^2(t)}{2} - W(t)[W(t+\tau)-W(t)]\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(t+\tau-t) - t + t = \frac{\tau}{2}$$

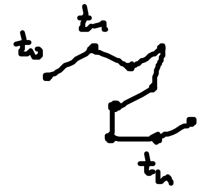
also: $A = A_S = \frac{I}{2}$

aber $A_I = 0$! (~ Integral $=0$, Gl. (11.8))

(ii) Biologie: oft diskrete Prozesse $\longrightarrow$ Ito-Interpretation

(iii) Analyse von Zeitreihen:

Bsp: Zufallsweg eines Mikroorganismus:



$\longrightarrow x(t_i)$, $i = 0, \ldots$

verwende einfachere Ito-Interpretation!

- <u>Beispiel</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x}_i + \gamma_{ij} x_j = \Gamma_i(t) \quad , \quad i = 1, \ldots, N \\ &\langle \Gamma_i(t) \rangle = 0 \,, \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = q_{ij}\, \delta(t-t') \,, \quad q_{ij} = q_{ji} \end{aligned}} \tag{11.22}$$

... Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

<u>Bem</u>: (1) lineare SDG

(2) q_{ij} ... Stärke des Rauschens

(3) $N=1$, $x \longrightarrow v$ ... 1D - Brownsche Bewegung mit Trägheit

(4) $\gamma_{ij} = 0$ ... Wiener-Prozeß!

Lösungen ... s. H. Risken, The Fokker-Planck Equation (Springer)

11.4 Die Fokker-Planck-Gleichung

- Motivation: DGl. für $P(x,t)$

mit $P(x,t)dx$ ... Wahrscheinl. System zur Zeit t in $[x, x+dx]$ anzutreffen

$\longrightarrow$ Berechnung von Momenten und Zeitkorrelationsfunktionen

$\triangleq$ Meßgrößen des stochast. Prozesses

a) Kramers – Moyal – Entwicklung:

• Führe ein: Propagator = bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(x,t+\tau|x',t) \;\dots\; \text{für } x \text{ bei } t+\tau, \text{ wenn } x' \text{ bei } t \text{ mit Sicherheit vorliegt}} \quad (11.23)$$

damit: $$P(x,t+\tau) = \int P(x,t+\tau|x',t)\,P(x',t)\,dx' \quad (11.24)$$

NB: Markov – Prozeß! $P(x,t)$ hängt nur von unmittelbarer Vergangenheit ab!

• Ziel: Gl. für $\frac{\partial P}{\partial t}$!

(i) Berechne: neue Variable: $x' \to \Delta$, $\Delta = x - x'$

$$P(x,t+\tau|x',t)\,P(x',t) = P(x+\Delta-\Delta, t+\tau|x-\Delta,t)\,P(x-\Delta,t) \quad (11.25)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\Delta^n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{P(x+\Delta,t+\tau|x,t)}_{\text{neue Fkt. in } x \text{ mit } \Delta \text{ als Index!}}\,P(x,t)\Big]$$

feste Verschiebung

(ii) also:

$$P(x,t+\tau) \overset{(11.24)}{=} \int (11.25)\,dx'$$

$$\text{mit } \int_{-\infty}^{\infty} \dots dx' \underset{\substack{\Delta = x-x' \\ d\Delta = -dx' \\ x \text{ fest}}}{=} -\int_{\infty}^{-\infty} \dots d\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\Delta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{\int \Delta^n P(x+\Delta,t+\tau|x,t)\,d\Delta}_{n\text{.tes Moment: } \langle [\underbrace{x(t+\tau)-x(t)}_{\Delta}]^n \rangle}\;P(x,t)\Big]$$

insbes.: $\langle [\dots]^0 \rangle = \langle 1 \rangle = 1$! Normierung!

$$\longrightarrow \quad P(x,t+\tau) = \underbrace{P(x,t)}_{\text{von } n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{\frac{\langle [x(t+\tau)-x(t)]^n \rangle}{n!}}_{= D^{(n)}(x,t)\,\tau + O(\tau^2)}\,P(x,t)\Big]$$

... Kramers-Moyal-Koeff. (10.26)

mit $\frac{P(x,t+\tau)-P(x,t)}{\tau} \xrightarrow[\tau\to 0]{} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = L_{KM}(x,t)\; P(x,t) \\ &\quad \text{mit } L_{KM} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left[D^{(n)}(x,t) \ldots\right] \end{aligned}} \qquad (11.26)$$

... Kramers-Moyal-(Vorwärts)-Entwicklg

≙ „propagiert vorwärts in der Zeit"

<u>NB:</u> Propagator $P(x,t\,|\,x',t')$ ... Lsg. von (11.26) mit Anfgsbedingung $P(x,t') = \delta(x-x')$!