

## English Summary:

### 1.1. A short history of quantum mechanics

1900 M. Planck: black body radiation

Quantum hypothesis: energy exchange of quanta  $E = h\nu$

1905 A. Einstein: photoelectric effect  
 $h$  Planck's constant,  $\nu$  frequency

Photons as light quanta of energy  $E = h\nu = \hbar\omega$

Compton: momentum  $p = \hbar k$

1912/13 N. Bohr: atomic energy levels  $E_n \sim -\frac{1}{n^2}$

follows from quantization condition  $\oint p dq = nh$

1924 L. de Broglie: Materiewellen

Beliebigen (freie!) Teilchen wird durch  
eine Frequenz  $\omega$  und durch  
eine Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  (de Broglie-Wellenlänge)  
zugeordnet, in Analogie zum Licht

$$\begin{array}{l} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{array}$$

Dispersionsbeziehung der de Broglie-Welle:

nichtrelativistisch

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

relativistisch

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$$

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} *$$

$$\omega(k) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2} ***$$

Sei  $v$  die Teilchengeschwindigkeit

$$p = mv$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} **$$

Phasengeschwindigkeit der de Broglie-Welle:

$$v_{ph} := \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{v}{2}$$

$\leftrightarrow$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} > c$$

(NB:  $v_{ph} = v = c$  für Photonen im Vakuum)

Gruppen geschwindigkeit

$$v_g := \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = v$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2c^2 \hbar k}{2\sqrt{m_0^2 c^4 + \hbar^2 k^2}} = \frac{c^2 k}{\omega}$$

$$v_g = \frac{c^2}{v_{ph}} = v$$

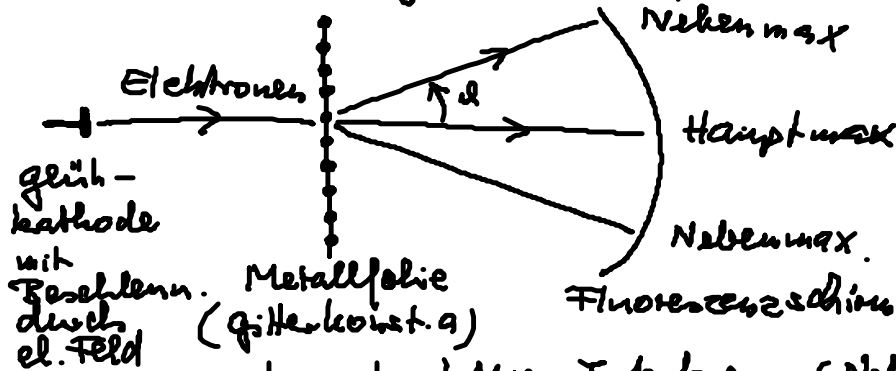


Also Gruppengeschwindigkeit der deBroglie-Welle gleich Teilchengeschwindigkeit!

Experimenteller Nachweis:

Elektronenstrahlen zeigen Interferenz, also Welleneigenschaften

(Davisson und Germer 1927, Rupp 1928)



konstruktive Interferenz (Nebenmax.):

$$a \sin \alpha = n \lambda \quad n \in \mathbb{N}$$

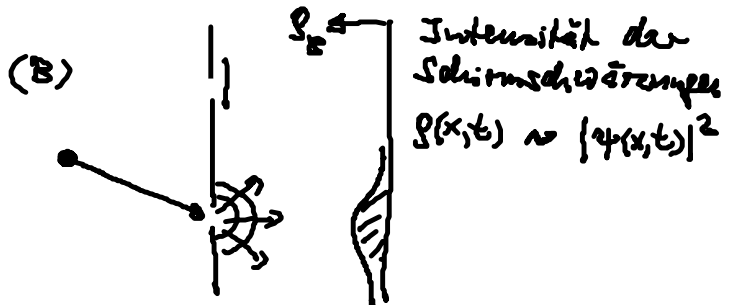
z.B. Elektronenwellen mit  $\phi = 1000 \text{ V}$ ,  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$   
 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$

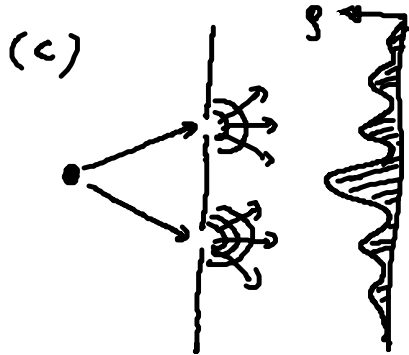
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \hbar}{p} = \frac{2\pi \hbar}{\sqrt{2m e \phi}} \approx 0.04 \text{ nm} = 0.4 \text{ \AA} \Rightarrow \text{erforderliche Gitterkonst. } a \approx \lambda$$

⇒ Elektronenmikroskopie

⇒ atomare Kristallgitter ( $a \approx 2 \dots 5 \text{ \AA}$ )

Doppelspalt experiment





NB: (i) Jedes Elektron verursacht einen lokalisierten Lichtblitz

$\Rightarrow \rho(x,t)$  ist nicht Materiedichte, sondern die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  zu messen

$$\rho(x,t) \sim |\psi_A(x,t) + \psi_B(x,t)|^2$$

$$\neq \rho_A + \rho_B$$

(ii) Häufigkeitsverteilung des Auftreffens ergibt das Beugungsbild (nicht Interferenz gleichzeitig einfallender Elektronen)

Zusammenfassung: Welle-Teilchen-Dualismus  
(ohne äußere Potentiale!)

	Wellen exp. z.B. Beugung	Teilchen exp. z.B. Photoeffekt, Comptoneffekt } Steuerung
Licht	klass. $\omega, k$ $\omega = c k $	nicht klass. $E = \hbar\omega$ $p = \hbar k$ $E = cp$
Elektron	nicht klass. $\omega = E/\hbar$ $k = p/\hbar$ $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$	klass. $E, p$ $E = \frac{p^2}{2m}$ (nichtrelativist.)

1925 E. Schrödinger: Wellen-Mechanik

Schrödinger-Gl.  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x) \psi$   
 $\hat{=}$  Wellengl. für Wellenfkt.  $\psi(x,t)$

1925 W. Heisenberg: Matrizen-Mechanik

kanon. Vertauschungs-Relationen für kanon. Variable  $q$  (o. Ort) und  $p$  (Impuls)

$$[p_k, q_l] \equiv p_k q_l - q_l p_k = \frac{\hbar}{i} \delta_{kl}$$

Interpretation von  $p, q$  als unendlich-dimensionale Matrizen (in der heutigen Sprache: lineare Operatoren im Hilbertraum)

## 1.2 Der quantenmechanische Zustandsbegriff

klass. Mechanik beschreibt Einzelobjekte („Teilchen“, „Massenpunkte“)

In der Mikrophysik betrachtet man viele identische, ununterscheidbare Teilchen (z.B. Elektronenstrahl)

→ prinzipielle Ununterscheidbarkeit

(keine mikroskop. „Labels“, die z.B.

Hg-Atome im Grundzustand durch Nummerierung unterscheiden)

→ Teilchenbegriff versagt, stattdessen Beschreibung durch Zustand des physikalischen Systems (festgelegt durch die Gesamtheit aller messbaren Größen = Observables)

Tieferer Grund: Wechselwirkung des Messprozesses mit den Mikroteilchen

→ Einbeziehung des Messprozesses in die Theorie

Definition des „Zustandes“ eines physikal. Objektes

(z.B. Atom) durch den Messprozess:

Sei eine Klasse von ununterscheidbaren Objekten durch bestimmte Messungen so beschrieben, dass man sie von allen anderen Klassen unterscheiden kann.

⇒ Die Objekte sind in dem durch diese Messung beschriebenen Zustand.

NB: qu. Zustandsvar. können diskret (quantisiert, z.B. Anregungsenergie eines Atoms) oder kontinuierlich (Energie eines freien Teilchens)

Sei,

Ziel der QM: Beschreibung von Zuständen und ihren Änderungen (Dynamik)

NB: Wellen- u. Matrizenmechanik sind spezielle Darstellungen dieser Theorie der Zustände und Observablen

(z.B. Energie  $E$ , Impuls  $p$ , Drehimpuls  $L$ )