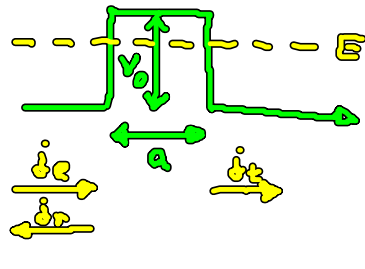


English Summary:

1.7 Tunnel effect



$$\text{transmission probability } T = \frac{|j_t|}{|j_i|} = |t|^2$$

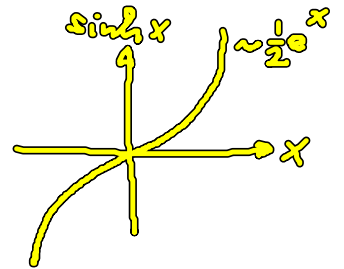
$$\text{reflection probability } R = \frac{|j_r|}{|j_i|} = |r|^2 = 1 - T$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)} a}{\hbar}\right)}$$

Diskussion:

(i) $\frac{E}{V_0} \ll 1$: $T \rightarrow 0$ für $E \rightarrow 0$
(Energie klein gegen Potenzialbarriere)

(ii) $\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)} a}{\hbar} \gg 1$: $T \rightarrow 0$ für $\gamma a \rightarrow \infty$



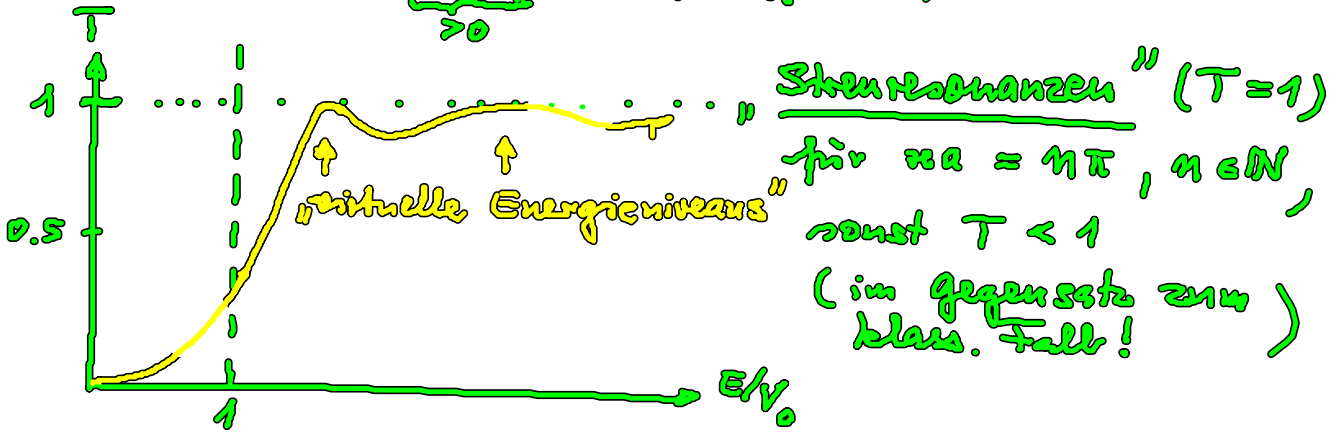
$$T \sim \exp\left(-2 \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)} a}{\hbar}\right) \quad \text{für } \gamma a \gg 1$$

(Breite der Potenzialbarriere a groß gegen deBroglie-Wellenlänge $\frac{2\pi}{\gamma}$ eines Teilchens der Energie $V_0 - E$:
klass. Grenzfall)

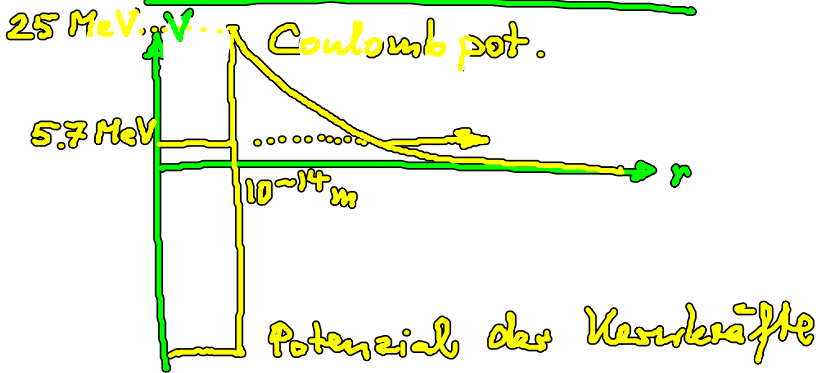
(iii) $E > V_0$: $\gamma = i \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} = i\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$

analyt. Fortsetzung mit $\sinh(\gamma a) - \sinh(i\pi a) = i \sin(\pi a)$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}a}{\hbar}\right)} \quad \frac{E}{V_0} > 1$$

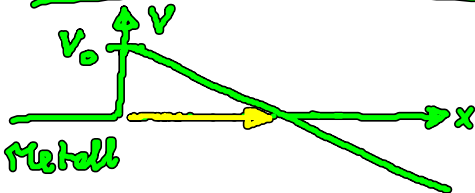


Beispiele für den Tunneleffekt



Die aus dem Radiumkern austretenden α -Teilchen haben Energie $E = 5.7 \text{ MeV} \ll V_0 = 25 \text{ MeV}$

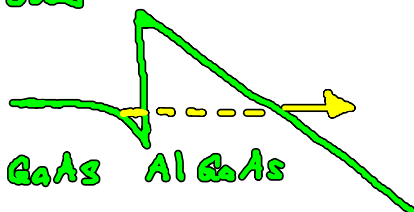
(ii) Kalte Feldemission



Ausström von Elektronen aus einem Metall, an das ein starkes el. Feld E angelegt ist:

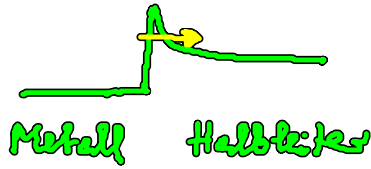
$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ (Metall)} \\ V_0 - eEx & x \geq 0 \text{ (außen)} \end{cases}$$

oder



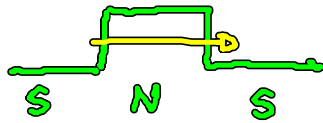
Halbleiterheterostruktur, im starken elektrischen Feld

oder



Metall Halbleiter

oder



Metall-Halbleiter (Schottky-) Kontakt
(Bewusstbewegung durch Raumladungsfeld)

Superleiter-Dielektrikum-Superleiter
(Josephson-) Kontakt

1.8 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

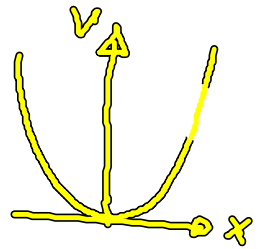
geucht :

Stationäre Zustände im Potenzial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ ($k > 0$)

Klass. Lösung: $x(t) = b \cos(\omega t + \alpha)$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\text{Energie } E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}\omega^2 b^2$$

(alle Energien $E > 0$ erlaubt)



Schrödinger-Gl.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\varphi'' = \left(\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\varphi$$

Asymptotisches Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$:

$$\varphi''(x) \sim x^2 \varphi(x)$$

$$\text{Ansatz } \varphi(x) = e^{-\beta x^2} f(x)$$

$$\varphi'(x) = -2\beta x e^{-\beta x^2} f + e^{-\beta x^2} f'$$

$$\varphi''(x) = (4\beta^2 x^2 - 2\beta) e^{-\beta x^2} f - 4\beta x e^{-\beta x^2} f' + e^{-\beta x^2} f''$$

Schrödinger-Gl.

$$\Rightarrow \underline{[(4\beta^2 x^2 - 2\beta) f - 4\beta x f' + f'']} e^{-\beta x^2} = \underline{\left(\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)} e^{-\beta x^2} f$$

führende Terme für $|x| \rightarrow \infty$: $4\beta^2 = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}$

$\beta = (\pm) \frac{m\omega}{2\hbar}$ (- Zeichen führt zu divergierenden, nicht normierbaren Lösungen)

Mit $\beta = \frac{m\omega}{2\hbar}$ folgt:

$$\left[f'' - 4\beta x f' + \left(\frac{2m}{\hbar^2} E - 2\beta \right) f \right] = 0$$

Potenzreihenansatz

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p x^p$$

$$f'(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p p x^{p-1}$$

$$f''(x) = \sum_{p=2}^{\infty} c_p p(p-1) x^{p-2} = \sum_{\tilde{p}=0}^{\infty} c_{\tilde{p}+2} (\tilde{p}+2)(\tilde{p}+1) x^{\tilde{p}}$$

Einsetzen in Dgl.:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[c_{p+2} (p+2)(p+1) - c_p \left(4\beta p + 2\beta - \frac{2m}{\hbar^2} E \right) \right] x^p = 0$$

Koeffizientenvergleich von x^p :

$$c_{p+2} = c_p \frac{2\beta(2p+1) - \frac{2m}{\hbar^2} E}{(p+2)(p+1)}$$

Diese Rekursionsformel verknüpft getrennt alle geraden ($p=0, 2, 4, \dots$) und alle ungeraden ($p=1, 3, 5, \dots$) Potenzen. (Grund: symm. Pot. $V(x) = V(-x)$.)

Falls die Potenzreihe nicht abbricht, gilt für $p \rightarrow \infty$:

$$\frac{c_{p+2}}{c_p} \rightarrow \frac{4\beta}{p} = \frac{2\beta}{\left(\frac{p}{2}\right)}$$

Für $|x| \rightarrow \infty$ kommt der Hauptbeitrag zur Potenzreihe von Potenzen mit großem p , also kann man asymptotisch abschätzen mit $p=2k$, $c_{2k} \sim \frac{(2\beta)^k}{k!} c_0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (x^2)^k \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\beta x^2)^k}{k!} = \exp(2\beta x^2) \quad (\text{für große } k)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = e^{-\beta x^2} f(x) \sim e^{\beta x^2} \quad \underline{\text{nicht normierbar!}}$$

Also muss für normierbares φ die Potenzreihe abbrechen: $c_{n+2} = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $c_n \neq 0$

$$\Rightarrow 2\beta(2n+1) - \frac{2m}{\hbar^2} E \stackrel{!}{=} 0 \quad 2\beta = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Energie - Eigenwerte des harmon. Oszillators

Nullpunktenergie: $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega > 0$

$E=0$ ist nicht möglich wegen der Unschärfe-Relation.