English Summary:

2.3 Eigenvalues and eigenstates of Hermitian operators

$\langle (\Delta\hat{F})^2\rangle = 0$ in eigenstate of $\hat{F}$

- Eigenvalues of Hermitian operators are real
- Eigenstates of Hermitian operators belonging to different eigenvalues are orthogonal $\langle m|n\rangle = \delta_{nm}$ (discrete basis)
  $\langle \underline{r}|\underline{r}'\rangle = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$ (continuous basis)
- 2 Hermitian operators commute $\Leftrightarrow$ $\exists$ a common eigenbasis

Unitary op. $U^+U = UU^+ = 1$ ($\Rightarrow$ $U^+ = U^{-1}$ scalar product invariant)

basis transformation $|\psi\rangle = U^+|\psi'\rangle$

$\hat{F} = U^+\hat{F}'U$ diagonalization

2.4 Die Quantisierung

Physikal. Observable $\longrightarrow$ hermite'sche Operatoren im Hilbertraum

z.B. Ort $x \longrightarrow \hat{x}$

Geschwindigk. $\dot{x} \longrightarrow \overset{\circ}{x} := \frac{\hat{p}_{kin}}{m} = \frac{\hat{p} - e\underline{A}}{m}$

hat nichts mit der Zeitableitung von x zu tun!

nicht-klass. Obs.

Parität $\hat{P}$ Spiegelungsoperator

(definiert in der Ortsdarstellung durch

$\hat{P}\psi(\underline{r}) := \psi(-\underline{r})$; allg. $\hat{P}|\underline{r}\rangle = |-\underline{r}\rangle$

$\hat{P}|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$ für symm. / antisymm. Zustände

$\Rightarrow$ Eigenwerte ± 1; es gilt $\hat{P}^2 = 1$, $\hat{P}^{-1} = \hat{P}^+ = \hat{P}$)

„Ist das System im Zustand $|\psi\rangle$?" $\longrightarrow$ $\hat{\mathcal{P}}_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ Projektionsop.

($\hat{\mathcal{P}}_\psi|\psi\rangle = |\psi\rangle\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}$ Eigenwert $+1$

$\hat{\mathcal{P}}_\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle$ Eigenwert 0

0 falls $\langle\psi| \perp |\phi\rangle$

Allg.: Durch $\hat{P}_\psi \cdot \hat{P}_\psi = \hat{P}_\psi$ ist ein Proj. defin.

Vertauschungsrelationen

Operatorkalkül ermöglicht Beschreibung mit nicht vertauschbaren Observablen:

$[\hat{F}, \hat{G}] = 0 \iff$ $\hat{F}$ und $\hat{G}$ besitzen gemeinsames System von Eigenzuständen

$\iff$ Observablen F und G zugleich scharf messbar

$[\hat{F}, \hat{G}] \neq 0 \iff$ F und G nicht zugleich scharf messbar

$\iff$ Beschreibung der quantenmech. Unschärfe

Quantisierung $\hat{=}$ Aufstellung von Vertauschungsrelationen

Kanon. Vertauschungsrelationen: (Heisenberg)

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{p}_i, \hat{x}_k] &= \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\mathbb{1} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_k] &= [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0 \end{aligned}}$$

$i = 1,2,3$
kartes. Koord.

(Berechnung in der Ortsdarstellung:

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_k]\psi(\underline{x}) = \frac{\hbar}{i}\partial_i(x_k\psi) - x_k\frac{\hbar}{i}(\partial_i\psi) = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\psi \quad)$$

NB: Hieraus lassen sich alle weiteren Kommutatoren berechnen.

<u>Messprozess</u>: $|\phi\rangle \xrightarrow[\text{von } \hat{F}]{\text{1. Messung}} |\phi'\rangle \xrightarrow[\text{von } \hat{F}]{\text{2. Messung}} |\phi''\rangle$

beliebig

Zustandsänderung durch WW mit Messapparat

Messwert: F' F''

Forderung: $F' = F''$ $\Rightarrow$ $F' = F'' = F_n$ Eigenwert

$|\phi'\rangle = |\phi''\rangle = |n\rangle =$ Eigenzustand von $\hat{F}$

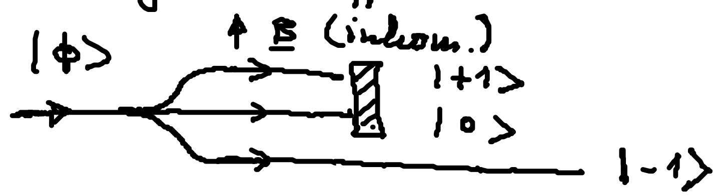
Also:

$$|\phi\rangle \longrightarrow |n\rangle$$

„Reduktion des Zustandsvektors durch Messung"

<u>Beispiel</u>: Stern-Gerlach-Apparatur

Ensemble von Teilchen mit magn. Moment m_z



Eigenzustand zu $m_z = -1$

Erwartungswert = Mittelwert über viele Messungen mit identisch präpariertem Ausgangszustand $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle = \sum_{n,n'} \langle\psi|n\rangle \underbrace{\langle n|\hat{F}|n'\rangle}_{F_n \delta_{nn'}} \langle n'|\psi\rangle$$

$$= \sum_n F_n \, |\langle n|\psi\rangle|^2$$

Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\psi\rangle$ (vor der Messung) den Messwert F_n zu messen: $|\langle n|\psi\rangle|^2$

(vgl. Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsdichte in Ortsdarstellung $|\psi(\underline{r})|^2 = |\langle\underline{r}|\psi\rangle|^2$)

Schreibweise mit Projektionsoperator:

$$|\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\underbrace{n\rangle\langle n}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle = \langle\hat{P}_n\rangle$$

<u>Maximalmessung</u>:

Es können i.a. nicht <u>alle</u> Observable zugleich scharf gemessen werden.

Gleichzeitige Messung eines vollständigen Satzes vertauschbarer Observablen: <u>Maximalmessung</u>.

„Vollständig" heißt: kann durch keine weiteren unabhängigen Observablen ergänzt werden, d.h. die gemeinsamen Eigenzustände sind <u>nicht entartet</u>.

Bei Entartung: weitere vertauschbare Operatoren hinzufügen, bis die gemeinsamen Eigenräume eindimensional sind

$\Rightarrow$ Zustand $|n, \alpha, \ldots\rangle$ ist durch Maximalmessung vollständig bestimmt.

<u>Spezialfall</u>: Falls Energie-Eigenwerte nicht entartet sind (z.B. gebundene eindim. Zustände), ist der Hamilton-Op. $\hat{H}$ eine vollständige Observable.

Bei Entartung: Weitere, mit $\hat{H}$ vertauschbare Observable hinzufügen (z.B. Drehimpuls, s. Kap. 3)

Der <u>Hilbertraum $\mathcal{H}$</u> eines physikal. Systems wird durch die gemeinsamen Eigenvektoren (Basis) eines vollständigen Satzes vertauschbarer Observablen aufgespannt.

<u>Nichtvertauschbarkeit und Unschärfe</u>:

Seien $\hat{F}, \hat{G}$ hermite'sche Operatoren, $|\psi\rangle$ beliebiger Zustand.

$$\left.\begin{aligned} \Delta\hat{F} &:= \hat{F} - \langle\hat{F}\rangle \\ \Delta\hat{G} &:= \hat{G} - \langle\hat{G}\rangle \end{aligned}\right\} \text{ ebenfalls hermite'sche Op.}$$

Bilde

$$f(\lambda) := \langle (\Delta\hat{F} + i\lambda\Delta\hat{G})(\Delta\hat{F} - i\lambda\Delta\hat{G}) \rangle \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \langle (\Delta\hat{F})^2 - i\lambda[\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] + \lambda^2(\Delta\hat{G})^2 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle}_{\alpha \geq 0} - i\lambda \underbrace{\langle [\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] \rangle}_{\beta} + \lambda^2 \underbrace{\langle (\Delta\hat{G})^2 \rangle}_{\gamma \geq 0}$$

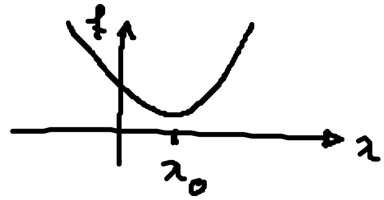
quadrat. Fkt. von λ mit $f(\lambda) \to \infty$ für $\lambda \to \infty$

(Lemma : Für hermite'sche Op. $\hat{A}, \hat{B}$ gilt:

$$\langle \hat{A}\hat{A} \rangle \geq 0 \; ; \; (i\hat{A})^+ = -i\hat{A} \; ; \; \langle \hat{A}\hat{B} \rangle^* = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle \;)$$

Mit $\hat{Q} := \Delta\hat{F} - i\lambda\Delta\hat{G}$ gilt $\hat{Q}^+ = \Delta\hat{F} + i\lambda\Delta\hat{G}$:

$$f(\lambda) = \underbrace{\langle \psi | \hat{Q}^+}_{\langle \phi |} \underbrace{\hat{Q} | \psi \rangle}_{| \phi \rangle} = \langle \phi | \phi \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda$$



Minimum: $f'(\lambda) = -i\beta + 2\lambda\gamma \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{i}{2}\frac{\beta}{\gamma}$$

$$f(\lambda_0) = \alpha + \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{\beta^2}{4\gamma} = \alpha + \frac{\beta^2}{4\gamma} \geq 0 \qquad (*)$$

$$\beta^2 = \langle [\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] \rangle^2 = \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle^2 = -\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle \underbrace{\langle [\hat{G}, \hat{F}] \rangle}_{\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle^*}$$

$$= -|\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|^2$$

β imaginär

$$(*) \Rightarrow \langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{G})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|^2$$

$$\boxed{\sqrt{\langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta\hat{G})^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|}$$ Unschärfe-Relation

qm. Unschärfe

Speziell: $[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i} \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\langle (\Delta\hat{p})^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta\hat{x})^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}$$ Heisenberg'sche Unschärfe-Relation

Impuls- Orts-

Unschärfe