

English Summary:

2.3 Eigenvalues and eigenstates of Hermitian operators

$\langle (\Delta F)^2 \rangle = 0$ in eigenstate of \hat{F}

- Eigenvalues of Hermitian operators are real
- Eigenstates of Hermitian operators belonging to different eigenvalues are orthogonal
 $\langle m | n \rangle = \delta_{nm}$ (discrete basis)
- 2 Hermitian operators commute $\Leftrightarrow \exists$ a common eigenbasis
 $\langle r | r' \rangle = \delta(r-r')$ (continuous basis)

Unitary op. $U^\dagger U = U U^\dagger = 1 \quad (\Rightarrow U^\dagger = U^{-1})$
scalar product (invariant)

basis transformation $| \psi \rangle = U^\dagger | \psi' \rangle$
 $\hat{F} = U^\dagger \hat{F}' U$ diagonalization

2.4 Die Quantisierung

Physical. Observable \longrightarrow hermite'sche Operatoren im Hilbertraum

z.B. Ort $x \longrightarrow \hat{x}$
geschwindigkeit $\dot{x} \longrightarrow \hat{x} := \frac{\hat{p}_{kin}}{m} = \frac{\hat{p} - e\hbar A}{m}$ hat nichts mit der Zeitableitung von x zu tun!

nicht-klass. Obs. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Parität} \\ \hat{P} \text{ Spiegelungsoperator} \\ \text{(definiert in der Ortsdarstellung durch)} \\ \hat{P} \psi(x) = \psi(-x); \text{ allg. } \hat{P} |z\rangle = |-z\rangle \\ \hat{P} |+\rangle = \pm |+\rangle \text{ f\"ur symm. Zust\"and} \\ \text{antisymm.} \\ \Rightarrow \text{Eigenwerte } \pm 1; \text{ es gilt } \hat{P}^2 = 1 \\ \hat{P}^{-1} = \hat{P}^\dagger = \hat{P} \end{array} \right.$

"Ist das System im Zustand $| \psi \rangle$?" $\longrightarrow \hat{P}_\psi := | \psi \rangle \langle \psi |$ Projektionsop.

$(\hat{P}_\psi | \psi \rangle = | \psi \rangle \underbrace{\langle \psi | \psi \rangle}_1$ Eigenwert +1

$\hat{P}_\psi | \phi \rangle = | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle$ Eigenwert 0

0 falls $\langle \psi | \psi \rangle$
Abb.: Dual $\hat{Q}_+ \cdot \hat{Q}_+ = \hat{Q}_+$ ist ein Proj. defn.

Vertauschungsrelationen

Operatorrechnung ermöglicht Beschreibung mit nicht vertauschbaren Observablen:

$[\hat{F}, \hat{G}] = 0 \Leftrightarrow \hat{F}$ und \hat{G} besitzen gemeinsames System von Eigenzuständen

\Leftrightarrow Observablen F und G zugleich scharf messbar

$[\hat{F}, \hat{G}] \neq 0 \Leftrightarrow F$ und G nicht zugleich scharf messbar

\Leftrightarrow Beschreibung der quantenmech. Unschärfe

Quantisierung $\hat{=}$ Aufstellung von Vertauschungsrelationen

Kanon. Vertauschungsrelationen: (Heisenberg)

$$\begin{aligned} [\hat{p}_i, \hat{x}_k] &= \frac{\hbar}{i} \delta_{ik} \mathbb{1} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_k] &= [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0 \end{aligned}$$

$i=1,2,3$
 kartes. Koord.

(Berechnung in der Ortsdarstellung:

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_k] \psi(x) = \frac{\hbar}{i} \partial_i (x_k \psi) - x_k \frac{\hbar}{i} \partial_i \psi = \frac{\hbar}{i} \delta_{ik} \psi$$

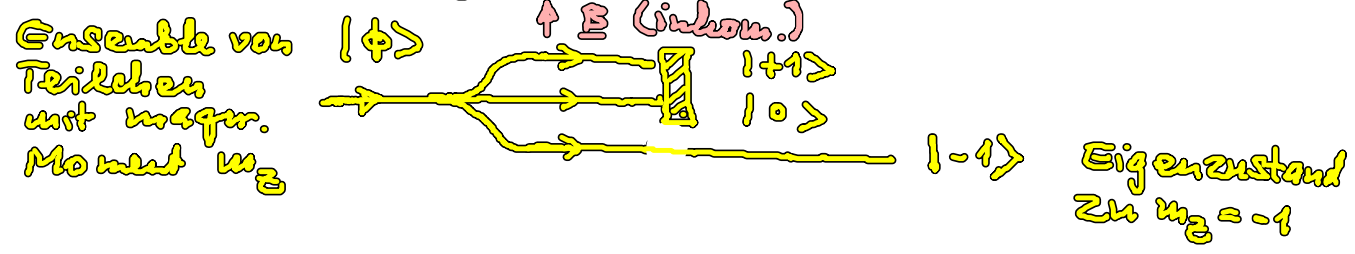
NB: Hieraus lassen sich alle weiteren Kommutatoren berechnen.

Messprozess: $|\phi\rangle \xrightarrow[\text{beliebig}]{1. \text{ Messung von } \hat{F}} |\phi'\rangle \xrightarrow[\text{von } \hat{F}]{2. \text{ Messung}} |\phi''\rangle$
 Zustandsänderung durch MW mit Messapparat

Messwert: F' F''
 Forderung: $F' = F'' \Rightarrow F' = F'' = F_n$ Eigenwert
 $|\phi'\rangle = |\phi''\rangle = |n\rangle = \text{Eigenzustand von } \hat{F}$

Also: $|\phi\rangle \rightarrow |n\rangle$
 „Reduktion des Zustandsvektors durch Messung“

Beispiel: Stern-Gerlach-Apparat



Erwartungswert = Mittelwert über viele Messungen mit identisch präparierten Ausgangszustand $|\psi\rangle$

$$\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \sum_{n, n'} \langle \psi | n \rangle \underbrace{\langle n | \hat{F} | n' \rangle}_{F_n \delta_{nn'}} \langle n' | \psi \rangle$$

$$= \sum_n F_n |\langle n | \psi \rangle|^2$$

Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|n\rangle$ (von der Messung) den Messwert F_n zu messen: $|\langle n | \psi \rangle|^2$
 (vgl. Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte in Ortsdarstellung $|\psi(x)|^2 = |\langle x | \psi \rangle|^2$)

Schreibweise mit Projektionsoperator:

$$|\langle n | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle = \langle \hat{P}_n \rangle$$

Maximalmessung:

Es können i.a. nicht alle Observablen zugleich scharf gemessen werden.

Gleichzeitige Messung eines vollständigen Satzes vertauschbarer Observablen: Maximalmessung.

„Vollständig“ heißt: kann durch keine weiteren unabhängigen Observablen ergänzt werden, d.h. die gemeinsamen Eigenzustände sind nicht entartet.

Bei Entartung: weitere vertauschbare Operatoren hinzufügen, bis die gemeinsamen Eigenräume eindimensional sind

⇒ Zustand $|n, \alpha, \dots\rangle$ ist durch Maximalmessung vollständig bestimmt.

Spezialfall: Falls Energie-Eigenwerte nicht entartet sind (z.B. gebundene eindim. Zustände), ist der Hamilton-Op. \hat{H} eine vollständige Observable.

Bei Entartung: Weitere, mit \hat{H} vertauschbare Observable hinzufügen
(z.B. Drehimpuls, s. Kap. 3)

Der Hilbertraum \mathcal{H} eines physikal. Systems wird durch die gemeinsamen Eigenvektoren (Basis) eines vollständigen Satzes vertauschbarer Observablen aufgespannt.

Nichtvertauschbarkeit und Unschärfe:

Seien \hat{F}, \hat{G} hermitesche Operatoren, $|\varphi\rangle$ beliebiger Zustand.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \hat{F} &:= \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \\ \Delta \hat{G} &:= \hat{G} - \langle \hat{G} \rangle \end{aligned} \right\} \text{ ebenfalls hermitesche Op.}$$

Bilde

$$f(\lambda) := \langle (\Delta \hat{F} + i\lambda \Delta \hat{G}) (\Delta \hat{F} - i\lambda \Delta \hat{G}) \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \langle (\Delta \hat{F})^2 - i\lambda [\Delta \hat{F}, \Delta \hat{G}] + \lambda^2 (\Delta \hat{G})^2 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle (\Delta \hat{F})^2 \rangle}_{\alpha \geq 0} - i\lambda \underbrace{\langle [\Delta \hat{F}, \Delta \hat{G}] \rangle}_{\beta} + \lambda^2 \underbrace{\langle (\Delta \hat{G})^2 \rangle}_{\gamma \geq 0}$$

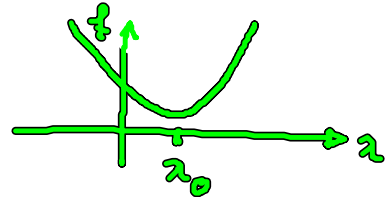
quadrat. Fkt. von λ mit $f(\lambda) \rightarrow \infty$ für $\lambda \rightarrow \infty$

(Lemma: Für hermitesche Op. \hat{A}, \hat{B} gilt:

$$\langle \hat{A} \hat{A} \rangle \geq 0; \quad (i\hat{A})^\dagger = -i\hat{A}; \quad \langle \hat{A} \hat{B} \rangle^* = \langle \hat{B} \hat{A} \rangle$$

Mit $\hat{Q} := \Delta \hat{F} - i\lambda \Delta \hat{G}$ gilt $\hat{Q}^\dagger = \Delta \hat{F} + i\lambda \Delta \hat{G}$:

$$f(\lambda) = \underbrace{\langle \psi | \hat{Q}^\dagger}_{\langle \phi |} \underbrace{|\hat{Q} | \psi \rangle}_{|\phi \rangle} = \langle \phi | \phi \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda$$



Minimum: $f'(\lambda) = -i\beta + 2\lambda\gamma \stackrel{!}{=} 0$
 $\Rightarrow \lambda_0 = \frac{i}{2} \frac{\beta}{\gamma}$

$$f(\lambda_0) = \alpha + \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{\beta^2}{4\gamma} = \alpha + \frac{\beta^2}{4\gamma} \geq 0 \quad (*)$$

$$\beta^2 = \langle [\Delta \hat{F}, \Delta \hat{G}] \rangle^2 = \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle^2 = -\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle \underbrace{\langle [\hat{G}, \hat{F}] \rangle}_{\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle^*}$$

$$= -|\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|^2$$

$$(*) \Rightarrow \langle (\Delta \hat{F})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{G})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|^2$$

$$\boxed{\sqrt{\langle (\Delta \hat{F})^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta \hat{G})^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle|}$$

Unschärfe-Relation

qu. Unschärfe

Speziell: $[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i} \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Impuls - Ort -

Heisenberg'sche Unschärfe-Relation

Handwritten text: "Handwritten"