

English Summary:
2.5 Dynamics

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_t = \hat{H} |\psi\rangle_t \Rightarrow |\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi\rangle_0 = U(t, 0) |\psi\rangle_0$$

$$\langle \hat{F} \rangle := \frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle \Rightarrow \boxed{\dot{\hat{F}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}}$$

Ehrenfest's Theorem: $\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle$
 $\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = - \langle \nabla V(\hat{x}) \rangle$

Schrödinger picture

Op. $\hat{F}_S(\hat{x}, \hat{p})$ time-indep.
 eigenvectors $|n\rangle$ time-indep.
 state vectors $|\psi\rangle_t$ time-dep.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_t = \hat{H} |\psi\rangle_t$$

Heisenberg picture

Op. $\hat{F}_H(t)$ time-dep.
 eigenvectors $|n\rangle$ time-dep.
 state vectors $|\psi\rangle = |\psi\rangle_0$ time-indep.

$$\hat{F}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$$

$$\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}_H]$$

$$\dot{\hat{F}} = \frac{d}{dt} \hat{F}_H$$

Interaction (Dirac) picture

Op. \hat{F}_W
 eigenvectors $|n\rangle$ } time-dep. through \hat{H}^0
 state vectors $|\psi\rangle_W$ time-dep. through perturbation op.

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1, \quad \hat{F}_W(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} \hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t}$$

$$\frac{d\hat{F}_W}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}^0, \hat{F}_W]$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle_W = \hat{H}^1 |\psi\rangle_W$$

2.6 Der harmonische Oszillator (algebraische Lösung)

Anwendungsbeispiel der abstrakten Darstellung im Hilbertraum: 1-dim. harmon. Osz.

(Notation im Folgenden: x, p, \dots statt \hat{x}, \hat{p}, \dots)

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2}$$

Hamilton op.

$$[p, x] = \frac{\hbar}{i}$$

Vertauschungs-Relation

Def. eines Operators („Leitoperator“)

$$b := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p - i \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \quad \text{nicht hermitesch!}$$

$$b^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow bb^{\dagger} &= \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{[p,x] = \frac{\hbar}{i}} \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^{\dagger}b &= \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 - \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{\frac{\hbar}{i}} \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \boxed{[b, b^{\dagger}] = 1}$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{H = \hbar\omega \left(b^{\dagger}b + \frac{1}{2} \right)}$$

Weitere Vertauschungsrelationen:

$$\left. \begin{aligned} (bb^{\dagger})b &= \frac{1}{\hbar\omega} Hb + \frac{1}{2}b \\ b(b^{\dagger}b) &= \frac{1}{\hbar\omega} bH - \frac{1}{2}b \end{aligned} \right\} [b, H] = bH - Hb = \hbar\omega b$$

adjungierte Version: $(bH)^{\dagger} - (Hb)^{\dagger} = -[b^{\dagger}, H] = \hbar\omega b^{\dagger}$

Verallgemeinerung:

$$[b, (b^{\dagger})^n] = n(b^{\dagger})^{n-1} = \frac{\partial}{\partial b^{\dagger}} (b^{\dagger})^n$$

Beweis durch vollständige Induktion:

$$n=1: [b, b^{\dagger}] = 1 \quad \checkmark$$

Sei für $n \geq 1$ die Behaupt. bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} [b, (b^{\dagger})^{n+1}] &= b(b^{\dagger})^{n+1} - (b^{\dagger})^{n+1}b \\ &= b(b^{\dagger})^{n+1} - \underbrace{(b^{\dagger})^n bb^{\dagger}} + \underbrace{(b^{\dagger})^n bb^{\dagger}} - (b^{\dagger})^{n+1}b \\ &= \underbrace{[b, (b^{\dagger})^n] b^{\dagger}}_{n(b^{\dagger})^{n-1}} + \underbrace{(b^{\dagger})^n [b, b^{\dagger}]}_1 \\ &= (n+1)(b^{\dagger})^n \end{aligned}$$

□

Adjungierte Version:

$$[b^+, b^n] = -n b^{n-1} = -\frac{\partial}{\partial b} b^n$$

Für beliebige, in Potenzreihe entwickelbare Fkt. f :

$$\begin{aligned} [b, f(b^+)] &= \frac{\partial}{\partial b^+} f(b^+) \\ [b^+, f(b)] &= -\frac{\partial}{\partial b} f(b) \end{aligned}$$

Eigenwerte von H

Sei $|E\rangle$ ein normierter Eigenzustand von H mit dem Eigenwert E , $|E\rangle \neq 0$

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\hbar\omega \langle E|b^+b|E\rangle}_{\langle \psi|\psi\rangle \geq 0} = \langle E|(H - \frac{\hbar\omega}{2})|E\rangle = E - \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E \geq \frac{\hbar\omega}{2}} \quad \text{Energiespektrum nach unten beschränkt}$$

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad b|E\rangle = 0$$

Behauptung: $b|E\rangle$ ist Eigenzustand zu H mit Eigenwert $E - \hbar\omega$

$$H|E\rangle = E|E\rangle \quad \Rightarrow \quad Hb|E\rangle = (E - \hbar\omega)b|E\rangle$$

Beweis:

$$Hb|E\rangle = \underbrace{(bH - \hbar\omega b)}_{\text{da } [b, H] = \hbar\omega b} |E\rangle = b \underbrace{(H - \hbar\omega)}_{(E - \hbar\omega)} |E\rangle$$

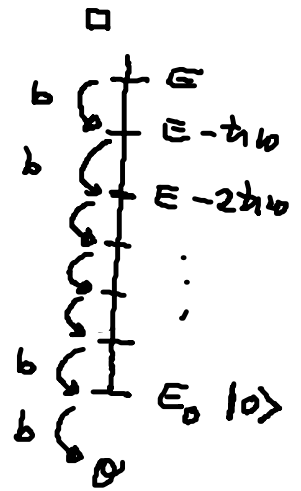
$$= (E - \hbar\omega) b |E\rangle$$

Durch Wiederholung könnte man Eigenzustände $|E\rangle \neq 0$ mit beliebig tiefer Energie erzeugen, wenn nicht $E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$ gelten müsste (s.o.).

Daher ex. $m \in \mathbb{N}$ so dass

$$b^m |E\rangle = 0, \text{ aber } b^{m-1} |E\rangle \neq 0$$

Definiere Grundzustand $n=0$ $|0\rangle := b^{m-1} |E\rangle$



$$H |0\rangle = \hbar\omega \left(b^{\dagger} b + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle$$

(nicht Null-kt!)
sondern Quantenzahl $n=0$

$b|0\rangle = b^m |E\rangle = 0$

Also $\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}$ $\boxed{b|0\rangle = 0}$

Weiter:

$$H b^{\dagger} |0\rangle = (b^{\dagger} H + \hbar\omega b^{\dagger}) |0\rangle = b^{\dagger} (H + \hbar\omega) |0\rangle$$

da $[b^{\dagger}, H] = -\hbar\omega b^{\dagger}$ $\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega \right) |0\rangle$

$$= \frac{3}{2} \hbar\omega b^{\dagger} |0\rangle$$

d.h. $b^{\dagger} |0\rangle$ ist Eigenzustand zum Eigenwert $\frac{3}{2} \hbar\omega$.

Vollständige Induktion:

$$\text{Sei: } H (b^{\dagger})^n |0\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) (b^{\dagger})^n |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Dann } H (b^{\dagger})^{n+1} |0\rangle &= (b^{\dagger} H + \hbar\omega b^{\dagger}) (b^{\dagger})^n |0\rangle \\ &= b^{\dagger} (H + \hbar\omega) (b^{\dagger})^n |0\rangle \\ &= \left(\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \right) (b^{\dagger})^{n+1} |0\rangle \\ &= \hbar\omega \left(n + 1 + \frac{1}{2} \right) (b^{\dagger})^{n+1} |0\rangle \end{aligned}$$

Normierung der Eigenzustände $(b^{\dagger})^n |0\rangle$:

Der Grundzustand sei normiert: $\langle 0|0\rangle = 1$

n -ter angeregter Zustand:

$|n\rangle = \alpha_n (b^\dagger)^n |0\rangle$ mit Normierungsfaktor α_n

$$1 \stackrel{!}{=} \langle n|n\rangle = |\alpha_n|^2 \langle 0|b^n (b^\dagger)^n |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle 0|b^n (b^\dagger)^n |0\rangle &= \langle 0|b^{n-1} \left((b^\dagger)^n b + \underbrace{[b, (b^\dagger)^n]}_{n(b^\dagger)^{n-1}} \right) |0\rangle \\ &= \underbrace{\langle 0|b^{n-1} (b^\dagger)^n b |0\rangle}_0 + n \langle 0|b^{n-1} (b^\dagger)^{n-1} |0\rangle \\ &= \dots \\ &= n(n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 \underbrace{\langle 0|0\rangle}_1 = n! \end{aligned}$$

also (bis auf willkürlichen Phasenfaktor):

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle$$

normierte Eigenzustände

zu den Energieeigenwerten

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Quanten-Sprechweise:

$$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega \quad \text{„Schwingungsquant“}$$

$|n\rangle$ Zustand mit n Schwingungsquanten (Phononen) der Frequenz ω

b Vernichtungsop. } für Schwingungsquanten
 b^\dagger Erzeugungsop.

$$\begin{aligned} b|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} b (b^\dagger)^n |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left\{ (b^\dagger)^n b + [b, (b^\dagger)^n] \right\} |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} n (b^\dagger)^{n-1} |0\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \end{aligned}$$

$$b^\dagger|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^{n+1} |0\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$N := b^\dagger b$ Teilchenzahloperator der Schwingungsquanten:

$$N|n\rangle = \underbrace{b^\dagger b}_{n} |n\rangle = n |n\rangle$$

$$\frac{\sqrt{n} |n-1\rangle}{\sqrt{n} \sqrt{n} |n\rangle}$$

in Übereinkimmung mit

$$H |n\rangle = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle$$