English Summary:

2.6 Harmonic oscillator (algebraic solution)

Ladder operator: $b = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x$

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$ $\qquad b^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x$ $\qquad \boxed{[b, b^+] = 1}$

$\boxed{H = \hbar\omega\left(b^+ b + \frac{1}{2}\right)}$ $\qquad \boxed{b|0\rangle = 0}$ ground state $n=0$

$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ $\qquad \boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^n|0\rangle}$ n-th excited state

$N := b^+ b$ number operator of oscillation quanta

$N|n\rangle = n|n\rangle$ $\qquad b^+$ creation operator

b annihilation operator

Zusammenhang mit der Ortsdarstellung

Mit $\varphi_n(x) = \langle x | n\rangle$, $\quad b = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x$

$$b\,\varphi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x\right)\varphi_n(x)$$

$$\xi := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$\Rightarrow\; b\,\varphi_n(\xi) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\varphi_n(\xi)$$

Wegen $b|0\rangle = 0$ folgt für $n=0$:

$$0 = \left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\varphi_0(\xi) \Rightarrow \frac{d\varphi_0}{\varphi_0} = -\xi\, d\xi$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_0(\xi) = A_0 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)}$$

Grundzustand

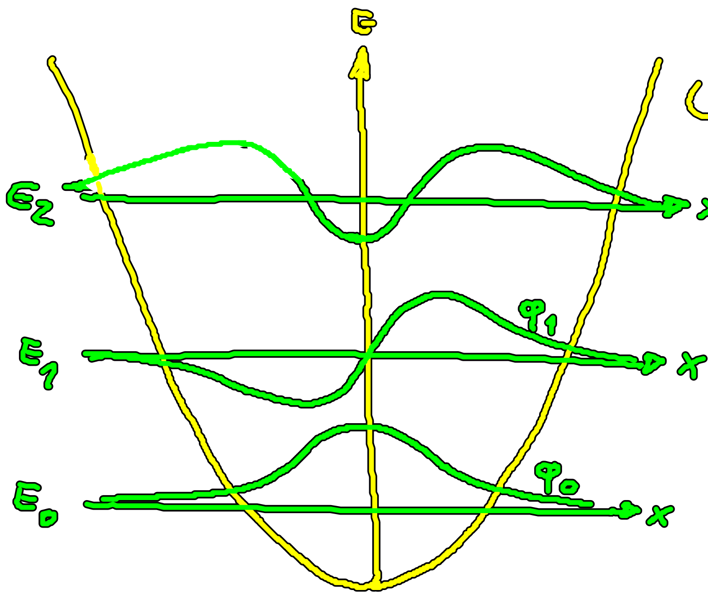
($A_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}$ Normierung)

angeregte Zustände:

$$\varphi_1(\xi) = b^+\varphi_0(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\varphi_0(\xi) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{\xi^2}{2}}\frac{d}{d\xi}\underbrace{\left[e^{-\frac{\xi^2}{2}}\varphi_0(\xi)\right]}_{A_0 e^{-\xi^2}}$$

$$\varphi_n(\xi) = \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}}\varphi_0(\xi) = \frac{i^n}{\sqrt{2^n n!}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n \varphi_0(\xi) = \underbrace{i^n \frac{A_0}{\sqrt{2^n n!}}}_{A_n}\underbrace{(-1)^n e^{\xi^2/2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\xi^2}}_{=:H_n(\xi)\, e^{-\xi^2/2}}$$

weglassen (Phasen-)faktor



Hermite'sche Polynome

$H_0(\xi) = 1$

$H_1(\xi) = 2\xi$

$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$

$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$

Parität von φ_n : $(-1)^n$

3. Drehimpuls

3.1 Drehimpuls-Eigenzustände

Drehimpulsoperator $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$

in Komponenten $L_j = x_k p_l - x_l p_k$ mit $(j\,k\,l)$ zykl.

d.h. $(1\,2\,3)$

oder $(2\,3\,1)$

oder $(3\,1\,2)$

$\underline{L}$ ist hermitesch:

$$L_j^+ = (x_k p_l)^+ - (x_l p_k)^+$$
$$= p_l^+ x_k^+ - p_k^+ x_l^+$$
$$= p_l x_k - p_k x_l$$

$= x_k p_l - x_l p_k = L_j$

<u>Vertauschungs-Relationen:</u>

$[L_1, L_2] = [(x_2 p_3 - x_3 p_2), (x_3 p_1 - x_1 p_3)]$

$= x_2 p_3 x_3 p_1 - \cancel{x_2 p_3 x_1 p_3} - \cancel{x_3 p_2 x_3 p_1} + x_3 p_2 x_1 p_3$
$- x_3 p_1 x_2 p_3 + \cancel{x_1 p_3 x_2 p_3} + \cancel{x_3 p_1 x_3 p_2} - x_1 p_3 x_3 p_2$

$= x_2 \underbrace{[p_3, x_3]}_{\hbar/i} p_1 + x_1 \underbrace{[x_3, p_3]}_{-\hbar/i} p_2$

$= \frac{\hbar}{i}(x_2 p_1 - x_1 p_2) = i\hbar L_3$

$\boxed{[L_j, L_k] = i\hbar L_l}$ mit $(j\,k\,l)$ zyklisch

$$\left.\begin{aligned} L_1 L_2 - L_2 L_1 &= i\hbar L_3 \\ L_2 L_3 - L_3 L_2 &= i\hbar L_1 \\ L_3 L_1 - L_1 L_3 &= i\hbar L_2 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\underline{L} \times \underline{L} = i\hbar \underline{L}}$$

Es gibt also keine gemeinsamen Eigenvektoren zu je 2 Drehimpulskomponenten.

<u>Aber</u>: $\boxed{[L^2, L_k] = 0}$ für $k = 1, 2, 3$

Beweis: $[\underline{L}^2, L_3] = [L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, L_3] = [L_1^2, L_3] + [L_2^2, L_3]$

$= L_1 \underbrace{[L_1, L_3]}_{-i\hbar L_2} + \underbrace{[L_1, L_3]}_{-i\hbar L_2} L_1 + L_2 \underbrace{[L_2, L_3]}_{i\hbar L_1} + \underbrace{[L_2, L_3]}_{i\hbar L_1} L_2$

$= 0$ $\square$

Es gibt also gemeinsame Eigenvektoren zu einem L_k (Konvention : L_3) und L^2.

Definition von Leiteroperatoren (vgl. harmon. Osz.):

$L_+ := L_1 + iL_2$ nicht hermitesch

$L_- := L_1 - iL_2$

Es gilt $(L_+)^+ = L_-$, $(L_-)^+ = L_+$

Vertauschungsrelationen

$$[L_+, L_3] = \underbrace{[L_1, L_3]}_{-i\hbar L_2} + i\underbrace{[L_2, L_3]}_{i\hbar L_1} = -\hbar(L_1 + iL_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned}[L_+, L_3] &= -\hbar L_+ \\ [L_-, L_3] &= \hbar L_-\end{aligned}}$$ (adjungierte Form)

Verallgemeinerung:

$[L_+^n, L_3] = -n\hbar L_+^n$

$[L_-^n, L_3] = n\hbar L_-^n$

Beweis durch vollständige Induktion: für $n=1$ gezeigt

Sei Behaupt. richtig für $n \geq 1$. Dann

$$[L_+^{n+1}, L_3] = L_+^n \underbrace{[L_+, L_3]}_{-\hbar L_+} + \underbrace{[L_+^n, L_3]}_{-n\hbar L_+^n} L_+ = -(n+1)\hbar L_+^{n+1}$$

□

Weiter gilt:

$$L_+L_- = (L_1 + iL_2)(L_1 - iL_2) = L_1^2 + L_2^2 - i\underbrace{[L_1, L_2]}_{i\hbar L_3} = L^2 - L_3^2 + \hbar L_3$$ (*)

$$L_-L_+ = L_1^2 + L_2^2 + i[L_1, L_2] = L^2 - L_3^2 - \hbar L_3$$

$$\Rightarrow \boxed{[L_+, L_-] = 2\hbar L_3}$$

$[L^2, L_+] = [L^2, L_-] = 0$, da $[L^2, L_k] = 0$

Mittels L_+, L_- gelingt eine Zerlegung von L^2 in mit L^2 vertauschbare Operatoren L_3, L_+, L_-:

$$L^2 = L_3^2 + L_2^2 + L_1^2$$
$$\overset{!}{=} L_3^2 + L_+L_- - \hbar L_3 \quad (*)$$

Eigenwerte und Eigenzustände

Die gemeinsamen (normierten) Eigenvektoren $|a,b\rangle$ von L^2 und L_3 gehorchen den Eigenwertgln.

$$L^2|a,b\rangle = a\,|a,b\rangle$$
$$L_3|a,b\rangle = b\,|a,b\rangle$$

Da $\underline{L}$ hermitesch ist, gilt

$$a = \langle a,b|L^2|a,b\rangle = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\underbrace{\langle a,b|L_i^+}\underbrace{L_i|a,b\rangle}}_{\langle\phi_i|\phi_i\rangle\ \geq 0} \geq \underbrace{\langle a,b|L_3^2|a,b\rangle}_{b^2\ \geq 0}$$

Also $\boxed{a \geq b^2 \geq 0}$ (*)

$L_\pm|a,b\rangle$ sind auch Eigenzustände zu L^2 und L_3:

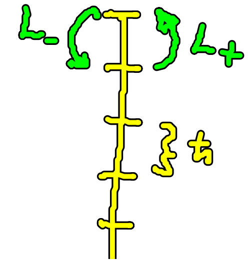
$$L^2\,\underline{L_\pm|a,b\rangle} = L_\pm L^2|a,b\rangle = a\,\underline{L_\pm|a,b\rangle}$$
$$L_3\,\underline{L_\pm|a,b\rangle} = (L_\pm L_3 - \underbrace{[L_\pm, L_3]}_{\mp\hbar L_\pm})|a,b\rangle = L_\pm\underbrace{(L_3\pm\hbar)|a,b\rangle}_{(b\pm\hbar)}$$

Also $L_3\left(L_\pm|a,b\rangle\right) = (b\pm\hbar)\left(L_\pm|a,b\rangle\right)$

d.h. $L_\pm$ erhöhen / erniedrigen Eigenwert von L_3 um $\hbar$,

(„Leiteroperatoren")

EW von L_3:



n- bzw. m-malige Anwendung bei festem b_0:

$$L_3 L_+^n|a,b_0\rangle = (b_0+n\hbar)L_+^n|a,b_0\rangle$$
$$L_3 L_-^n|a,b_0\rangle = (b_0-m\hbar)L_-^m|a,b_0\rangle$$

Das Spektrum von L_3 ist nach oben und nach unten beschränkt:

(*) $$-\sqrt{a} \le b \le \sqrt{a}$$

Also ex. größter Eigenwert $b_{max} = b_0 + n_{max}\hbar$

und kleinster Eigenwert $b_{min} = b_0 - m_{max}\hbar$

mit $$L_+ |a, b_{max}\rangle = 0$$
$$L_- |a, b_{min}\rangle = 0$$

Daraus folgt

$$0 = L_- L_+ |a, b_{max}\rangle = (L^2 - L_3^2 - \hbar L_3)|a, b_{max}\rangle = (a - b_{max}^2 - \hbar b_{max})|a, b_{max}\rangle$$

$$0 = L_+ L_- |a, b_{min}\rangle = (L^2 - L_3^2 + \hbar L_3)|a, b_{min}\rangle = (a - b_{min}^2 + \hbar b_{min})|a, b_{min}\rangle$$

Also $$a = b_{max}^2 + \hbar b_{max} \stackrel{!}{=} b_{min}^2 - \hbar b_{min} \qquad (1)$$

Andererseits ex. $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|a, b_{max}\rangle = (L_+)^n |a, b_{min}\rangle$

also $$\boxed{b_{max} = b_{min} + n\hbar} \qquad (2)$$