

Wk:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} J_{ij} \hat{\underline{j}}_i \cdot \hat{\underline{j}}_j + g/\hbar \mu_B \sum_{i=1}^N \hat{\underline{j}}_i \cdot \underline{B}_0$$

(Ermittlung:

$$\hat{\underline{\mu}}_i = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \hat{\underline{j}}_i)$$

Molekularfeld-Näherung:

— Fluktuation:

$$\hat{\underline{j}}_i = \langle \hat{\underline{j}}_i \rangle + \delta \underline{j}_i, \text{ entsprechend } \hat{\underline{j}}_j$$

Dann: Linearisierte Kopplungsterm bzgl. $\delta \underline{j}_i$
(Annahme: Fluktuation klein)

Einsetzen ~~und~~, linearisieren und
lasse konstanten Term ($\sim \langle \hat{\underline{j}}_i \rangle \cdot \langle \hat{\underline{j}}_j \rangle$)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \hat{H}^{\text{MF}} &= - \sum_{i \neq j} J_{ij} \hat{\underline{J}}_i \cdot \langle \hat{\underline{J}}_j \rangle + \frac{g\mu_B}{\hbar} \sum_{i=1}^N \hat{\underline{J}}_i \cdot \underline{B}_0 \\
&= - \sum_{i \neq j} J_{ij} (\hat{\underline{J}}_i - \langle \hat{\underline{J}}_i \rangle) \cdot \langle \hat{\underline{J}}_j \rangle \\
&\quad + \frac{g\mu_B}{\hbar} \sum_{i=1}^N \hat{\underline{J}}_i \cdot \underline{B}_0 \\
&= - \sum_{i=1}^N \hat{\underline{J}}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N J_{ij} \langle \hat{\underline{J}}_j \rangle + \sum_{i \neq j} J_{ij} \langle \hat{\underline{J}}_i \rangle \cdot \langle \hat{\underline{J}}_j \rangle \\
&\quad + \frac{g\mu_B}{\hbar} \sum_{i=1}^N \hat{\underline{J}}_i \cdot \underline{B}_0
\end{aligned}$$

Um schreiben:

$$\hat{H}^{\text{MF}} = \frac{g\mu_B}{\hbar} \sum_{i=1}^N \hat{\underline{J}}_i \cdot \underline{B}_i^{\text{eff}}$$

$$\text{mit } \underline{B}_i^{\text{eff}} = \underbrace{- \frac{\hbar}{g\mu_B} \sum_{j=1}^N J_{ij} \langle \hat{\underline{J}}_j \rangle}_{\text{Beitrag aus den Wechselwirkungen - genähert!}} + \underline{B}_0$$

effektives Feld,
das auf den
Spin i wirkt

Beitrag aus den
Wechselwirkungen
- genähert!

externes
Magnet-
feld

Man sieht: Durch die Einführung des effektiven Feldes
hat H_{eff} "Einfacher-Struktur" keine Kopplung!

Konsequenz:

Wir können die Ergebnisse aus
der Theorie nicht wechselwirkender
Spin-Systeme (Zustandssumme, Magnetisierung)
mit leichter Umschreibung übernehmen!

Zunächst: Umschreiben des effektiven Feldes

Definiere: $M = \left\langle \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i \right\rangle = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \left\langle \sum_{i=1}^N \hat{J}_i \right\rangle$

$$\Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^N \hat{J}_i \right\rangle = -\frac{\hbar}{g\mu_B} M$$

Nehme außerdem homogenes System
an, d.h. gilt

$$J_{ij} = \frac{J}{N} \text{ unabhängig von } ij!$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{B}_i^{\text{eff}} &= -\frac{\hbar}{g\mu_B} \sum_{j=1}^N J_{ij} \langle \underline{J}_j \rangle + \underline{B}_0 \\ &= -\frac{\hbar}{g\mu_B} \frac{J}{N} \sum_{j=1}^N \langle \underline{J}_j \rangle + \underline{B}_0 \\ &= \left(\frac{\hbar}{g\mu_B}\right)^2 \frac{J}{N} \underline{M} + \underline{B}_0 \end{aligned}$$

also unabhängig
von Teilchenindex!

ersetze nun noch.

$$m = \frac{M}{N}$$

und führe ein: $\lambda = \left(\frac{\hbar}{g\mu_B}\right)^2 J$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{B}_i^{\text{eff}} &= \lambda \underline{m} + \underline{B}_0 \\ &= \underline{B}^{\text{eff}} \end{aligned}$$

~~hat~~ und $\hat{H}^{\text{eff}} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \sum_{i=1}^N \hat{J}_i \cdot \underline{B}^{\text{eff}} = -\sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i \cdot \underline{B}^{\text{eff}}$

Folgerung für Magnetisierung:

$$\text{mit } (\underline{B}_0 = B_0 \underline{e}_z)$$

$$\frac{M}{N} = m = g \mu_B J \quad B_y \left(\beta g \mu_B J (J m + B_0) \right)$$

↑
Brenn-funktion

↑
externes
Feld

Temperaturabhängigkeit

beachte: Die Magnetisierung pro
Gitterplatz lautet auf beiden
Seiten der Gleichung auf

→ Selbstkonsistenzgleichung!

Spezialisierē auf Ising-Modell

$$J = \frac{1}{2} \Rightarrow m^j = \pm \frac{1}{2} \quad \text{2 Spin-Einstellungen möglich}$$

Neue Variable:

$$S_i = \pm 1$$

$$\Rightarrow H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_{ij} S_i S_j - \sum_{i=1}^N S_i h \quad \text{äußeres Magnetfeld}$$

Mache Malekularfeld-Approximation ($\Rightarrow H^{\text{MF}}$ mit Einzelstruktur) und mache die Zustandssumme aus

$$\Rightarrow Z_N = e^{-\beta N \frac{J}{2} m^2} (2 \cosh(\beta h^{\text{eff}}))^N$$

mit $h^{\text{eff}} = Jm + h$
Wechselwirkung

Daraus die freie Energie:

$$F = -k_B T \ln Z_U$$

$$= k_B T N \left(\beta \frac{J}{2} m^2 - \ln 2 \cosh(\beta(Jm+h)) \right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{F}{N} = \frac{1}{2} J m^2 - k_B T \ln(2 \cosh(\beta(Jm+h)))$$

Freie Energie pro Gitterplatz

Setze $h=0$ also kein äußeres Magnetfeld:

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2} J m^2 - k_B T \ln(2 \cosh(\beta J m))$$

Taylorentwicklung bzgl. m im
zweiten Term:

$$\textcircled{1} \quad \cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\textcircled{2} \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\Rightarrow \ln(\cosh(\beta J_m))$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{\approx} \ln\left(1 + \frac{1}{2}(\beta J_m)^2\right)$$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{\approx} \frac{1}{2}(\beta J_m)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\beta J_m)^2\right)^2 = \frac{1}{2}\beta J_m - \frac{1}{8}(\beta J_m)^4$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2} J_m^2 - k_B T \ln 2$$

$$- k_B T \left(\frac{1}{2} (\beta J_m)^2 - \frac{1}{8} (\beta J_m)^4 \right)$$

$$\Rightarrow \beta f = \frac{1}{2} \beta J_m^2 - \ln 2$$

$$- \frac{1}{2} (\beta J_m)^2 + \frac{1}{8} (\beta J_m)^4$$

l: $k_B T$

Man nennt ^{darüber} Entwicklungen der freien Energie
(in Potenzen des entsprechenden Ordnungsparameters,
hier der Magnetisierung pro Gitterplatz) Landau-Entwicklung

nodinal umschreiben:

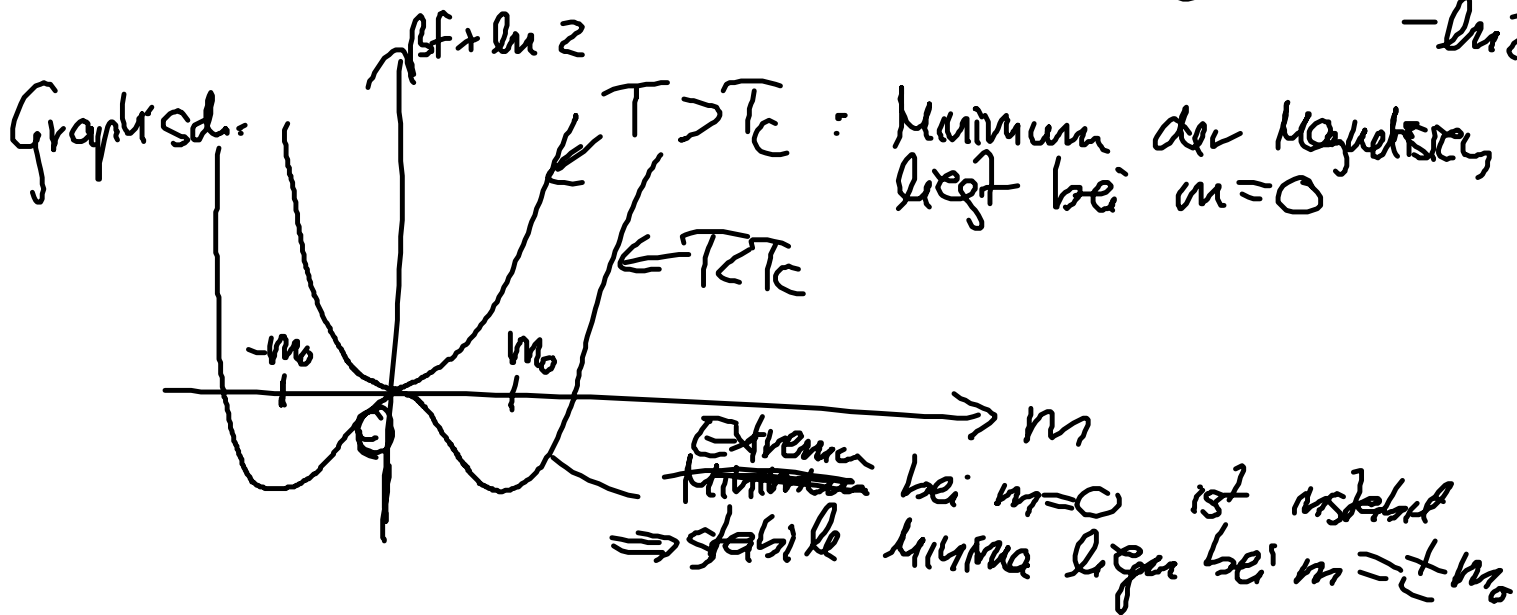
$$\beta f = \frac{1}{2} m^2 \beta J \underbrace{(1 - \beta J)}_{1 - \frac{J}{k_B T}} + \frac{1}{8} (\beta J)^4 m^4 - \ln 2$$

Dieser Faktor kann sein Vorzeichen wechseln \Rightarrow Zeichen eines Phasenübergangs (2. Ordnung)

führe ein:

Kritische Temperatur $T_c = \frac{J}{k_B}$

$$\rightarrow \beta f = \frac{1}{2} m^2 \frac{T_c}{T} \left(1 - \frac{T_c}{T}\right) + \frac{1}{8} (\beta J)^4 m^4 - \ln 2$$



Bei Temperatur $T < T_c$ findet man
also thermodynamisch stabile
Lösungen mit $m = \pm m_0 \neq 0$,

Obwohl kein äußeres Magnetfeld vorhanden
ist

⇒ Ferromagnetismus

In der Temperaturabhängigkeit der
Magnetisierung findet man (direkt bei T_c)

$$m_0 \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta$$

↑
krit. Exponent

$$\text{mit } \beta = \frac{1}{Z}$$



VII. Quantenstatistik