# Theoretische Optik

VL: Do, Fr. $10^{15} - 12^{00}$ EW 203

Übung: Mo $16^{15} - 17^{45}$ EW 203

(16.5. noch nicht festgelegt)

Sprechstunde: Di 13-14 EW 742 (Knorr)

ÜA: Do Ausgabe

Abgabe in Übung

## I Einführung in VL

### 1. Historischer Abriss

- Demokrit (400 vuZ) Lichtstrahlen sind Teilchen auf Bahnen im leeren Raum
- Aristoteles (350 vuZ) leerer Raum ist nicht vorstellbar
  Licht als Eigenschaft v. Körpern
  Farbe als zentraler Begriff (Goethe)

- ab 17 Jh. dramatische Entwicklung
- Z. Jansse (1600) Mikroskop
- G. Galilei (1609) Teleskop
- W. Snell (1621) Brechungsgesetz
- R. Hooke (1665) Wellentheorie
- I. Newton (1704) Korpuskulartheorie (Polarisation, Beugung)
- O. Roemer (1676) Messg. Lichtgeschwindigkeit
- F.W. Herschel (1800) Infrarot
- J.W. Ritter (1801) UV
- T. Young (1801/1817) Interferometrie, transversale Welle
- C.F. Gauss (1820) Geometrische Optik
- G.R. Kirchhoff (1883) Beugung
- E Abbe (1900) Auflösungsvermögen

- J.C. Maxwell (1862) Maxwellgleichungen
- H. Hertz (1888) em. Welle
- M. Planck (1900) Strahlungsgesetze
- A. Einstein (1905) Quantenhypothese Licht
  Photoeffekt
- W. Heisenberg u.a. (1920) > Quantisierg. Wellenfelder
- T.H. Maiman (1960) Laser
- Townes / Prochorow / Basov Nobelpreis (1964)
- J. Kimble u.a. (1977) nichtklass. Licht (Einzelphotoneneffekte)
- heutige Forschg. in Quantenoptik
  (Verschränkung, gequetschte Zustände u.a.)

## 2. Optische Felder (im Vakuum)

Zwei Zugänge: Feldfunktion $\vec{E}(\vec{r},t)$

Modenentwicklg. $= \sum_\lambda \vec{u}_\lambda(\vec{r})\, c_\lambda(t)$

## a) Feldgleichungen

Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t)$$

Wellengleichung im Vakuum

z.B. 1d $\quad \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0$

$$\underbrace{\vec{E} = f(z - ct) + g(z + ct)}$$

Funktion $g, f$ sind d. AB, RB festzulegen

## b) Modenentwicklung

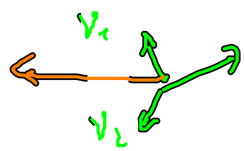
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \vec{u}_\lambda(\vec{r})\, c_\lambda(t) \quad + c.c.$$

Feld entwickelt

$\{\vec{u}_\lambda(\vec{r})\}$ vollständiges Funktionssystem

zeitabhängige Koeffizienten

<u>z.B.</u> ebene Welle




$\lambda : \vec{k},\ \nu_{=1,2}(\vec{k})$

$$\vec{k} : \quad \vec{u}_\lambda = \vec{e}_{\nu_{1,2}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\sum_\lambda \ \hat{=}\ \sum_{\vec{k}} \sum_{\nu(\vec{k})=1}^{2}$$

## Bestimmung d. Moden:

$\Box \vec{E}(\vec{r},t) = 0$, Entwicklung einsetzen

$$\sum_\lambda \Big( \underbrace{\Delta\, \vec{u}_\lambda(\vec{r})}_{-\ell_\lambda^2 \vec{u}_\lambda(\vec{r})}\, c_\lambda(t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 c_\lambda(t)\, \vec{u}_\lambda(\vec{r}) \Big) = 0$$

als Eigenwert d. $\Delta$ Operators bestimmen

$$\ell_\lambda,\ \vec{u}_\lambda \longrightarrow \ell_\lambda^2\, c_\lambda(t) = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 c_\lambda(t)$$

$$c_\lambda(t) = c_\lambda(0)\, e^{\pm i c \ell_\lambda t}$$

$c k_\lambda = \omega_\lambda$

→ Modenentwicklg. ist mögl. wenn $\Delta u_\lambda = -k_\lambda^2 u_\lambda$ lösen

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \vec{u}_\lambda(\vec{r})\, c_\lambda(0)\, e^{i\omega_\lambda t} + cc.$$

## c) Quanten- und klass. Felder

(i) Übergang z. Quantentheorie $c \to \underline{c}$

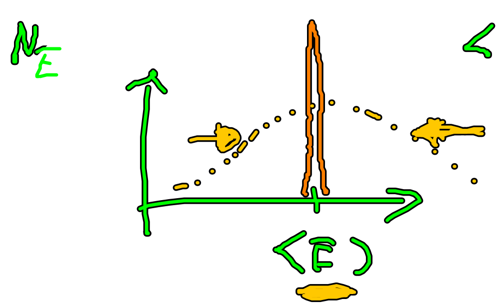
$$[\underline{c}_\lambda, \underline{c}^\dagger_{\lambda'}] = \delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{f. Moden}$$

$$[\underline{A}_i(\vec{r}), -\varepsilon_0 \underline{E}_j(\vec{r}\,')] = \delta^T_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

(ii) Unterscheidg. klass. u. qu. Felder:

geringe Schwankung d. Photonenzahl / Intensität

bedeutet: $\dfrac{\langle \Delta E \rangle^2}{\langle \vec{E} \rangle^2} \to 0$ → klassisch Feld




- Glauberzustände, kohärente Zustände erfüllen dies Kriterium f. klass. Beschreibg.

→ dann ausreichend $\langle \vec{E} \rangle$ zu beschreiben

≙ klass. Maxwellgleichg.

## 3/ Inhalte d. VL

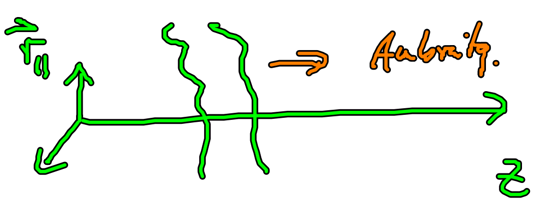
| Do klass. Aspekte | Fr. qu. Aspekte |
|---|---|
| A. Knorr | H. Appel |
| - Lichtstrahlen | - Feldquantisierg. |
| - linear Optik, nichtlinear Optik | - Resonator und Quantenoptik |
| - Lichtausbreitg. (Solitonen) | - Zustände, WW und Materie |

Aspekte: Nanooptik, extrem nichtlineare Optik, Spektroskopie, Feynmandiagramme

# II Strahlen und Lichtpulse in paraxialer Optik

## 1. Paraxiale Wellengleichung im Vakuum

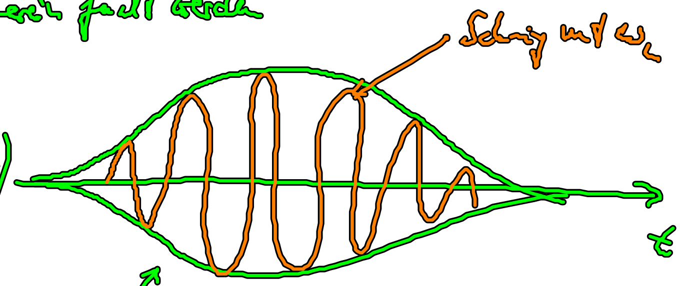
Strahlen
3d Objekte
$(\vec{r}, t)$




$\Rightarrow$ Ausbreitg. $\vec{k}_L = k_L \vec{e}_z$ dominante Ausbreitg.

Ziel: Abweichg. ansehen

$\Box \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ soll vereinfacht werden




$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 Komponente} \\ (x, y)}}{E_i} = \underbrace{\tilde{E}_i(\vec{r}_\parallel, z, t)}_{\substack{\text{gerecht f.} \\ \text{paraxiale Näherung}}} e^{i(k_L z - \omega_L t)}$$

einsetzen in $\Box \vec{E} = 0$

brauchen $\partial_z^2$, $\partial_t^2$ um einzusetzen

geschickt wählen

$$\partial_z^2 E = \left(\cancel{\partial_z^2 \tilde{E}} + 2 i k_L \partial_z \tilde{E} - k_L^2 \tilde{E}\right) e^{i(k_L z - \omega_L t)}$$

$$\partial_t^2 E = \left(\cancel{\partial_t^2 \tilde{E}} - 2 i \omega_L \partial_t \tilde{E} - \omega_L^2 \tilde{E}\right) e^{i(k_L z - \omega_L t)}$$

$k_L$, $\omega_L$ Trägerwellenzahl / frequenz

einsetzen und $k_L$ so wählen daß $\omega_L = c k_L$, i. weglassen

$$\left(\partial_z^2 + \Delta_\parallel - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) E = \Big(2 i k_L \partial_z \tilde{E} + \Delta_\parallel \tilde{E}$$

$$+ 2 i \omega_L \partial_t \tilde{E} + \underbrace{\left(-k_L^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2}\right)}_{=0} \tilde{E}\Big) e^{i\cdots}$$

$$\left(\underbrace{\partial_z + \frac{1}{c} \partial_t}_{} + \underbrace{\frac{1}{2 i k_L} \Delta_\parallel}_{}\right) \tilde{E}(z, \vec{r}_\parallel, t) = 0$$

1. Ableitungen, einfach zu behandeln

Bezug $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$

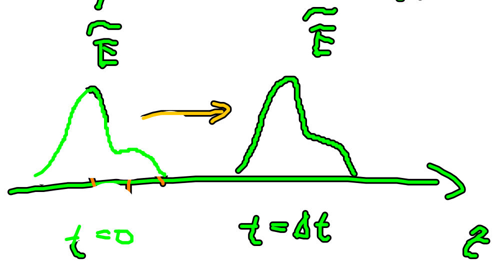
Ausbreitg. d. 1. Ordng. partielle Dgl. beschreiben

$$\left(\partial_z + \frac{1}{c}\partial_t\right)\tilde{E} = 0$$

beschreibt Ausbreitg. in positiver z-Richtg.

$$\tilde{E} = f\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

$$= \tilde{f}(z - ct)$$




$\Delta z = c\Delta t$

ist einfach Verschiebg. in Zeit bzw Ort

Einführg. einer retardierten Zeit $y = t - \frac{z}{c}$

$$\xi = z$$

$$(t, z) \to (y, \xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} = \partial_y$$

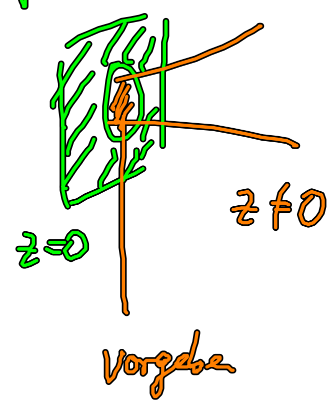
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{1}{c}\partial_y + \partial_\xi$$

$$\boxed{\left(\partial_\xi + \frac{1}{2ik_L}\Delta_\perp\right)\tilde{E}(\xi, \vec{r}_\perp, \tau) = 0}$$

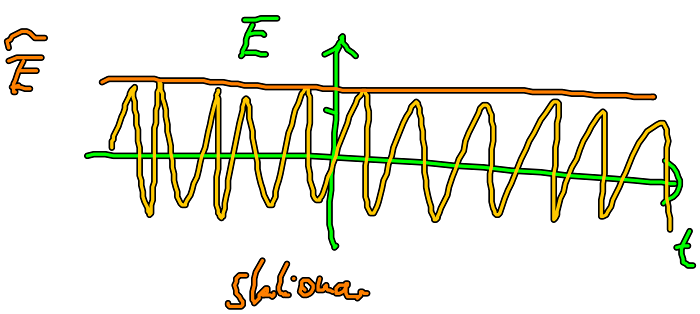
paraxiale Wellengleichung f. Lichtpulse $\tilde{E}$ in mitbewegten Koordinaten

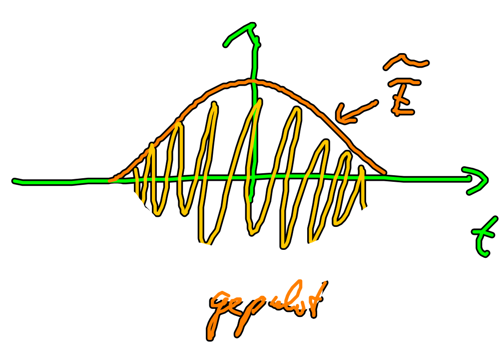
Bemerkungen:

a) partielle Dgl. in zweiter Ordnung, analog Schrödingergleichung. beschreibt räumliche Ausbreitung f. eine bei $\xi = z = 0$ vorgegebene Verteilung v. Licht




b) enthält jetzt gepulste und stationäre Wellen in derselben Formulierung.




## 2. Lösung der paraxialen Wellengleichung

Lösg erfolgt analog zu Schrödingergleichung im Fourierraum

- fund. mode: Gauß Strahl (ÜA)

$$\tilde{E}_G = \tilde{E}_0(y)\,\frac{\exp\left(-\frac{r_\perp^2}{w_0^2\,(1+2i\xi/k_L w_0^2)}\right)}{(1+2i\xi/k_L w_0^2)}$$

wenn man bei $\tilde{E}_G(z=0)$ die Verteilg.

$$E_0(y)\, e^{-r_\perp^2/w_0^2} \quad \text{vorgibt}$$

$w_0$ – Breite bei $\xi = z = 0$

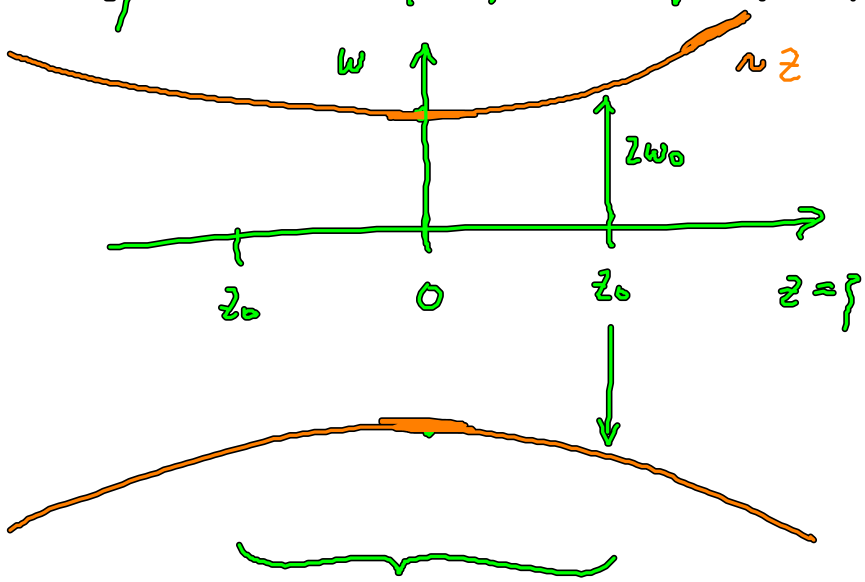
<u>Bemerkungen</u>:

a) Lösg. heißt Gauß mode

2 charakterist. Längen: Breite $w_0$ bei $z=0$

Rayleigh-Länge $z_0 = \frac{k_L w_0^2}{2}$

b) Intensität $|\tilde{E}|^2$ auftragen f. typische Breite $w = w_0\left(1+\frac{\xi^2}{z_0^2}\right)^{1/2}$




Rayleighzone

c) Wellenfronten:

bei $z=0$ ebene Welle

$z\to\infty$ Kugelwelle

d) Gaußstrahl ist keine exakte Lösung

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \neq 0$ , $i = x$

$\partial_z E_z = -\partial_x E_x$

abschätzen

Gaußstrahl einsetzen

$\sim k_L E_z = -i\frac{2x}{w_0^2(\;)k_L} E_x \longrightarrow \frac{1}{w_0 k_L}$ klein [illegible] soll klein sein!

$= \frac{\lambda}{\omega_0} \to 0$

$\boxed{\lambda \ll \omega_0}$ ist zu fordern