Theoretische Optik / Quantenoptik

E-Mail: appel@fhi-berlin.mpg.de

Sprechstunde: Fr. 12–13 Uhr EW 728

1.5. Übungsblatt online
5.5. " als Ausdruck in Übung + Besprechung

I Erste Quantisierung

1.1. Wellengleichung für (einzelne) Photonen in erster Quantisierung

Erinnerung: Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{E} \qquad \text{Faraday}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{B} \qquad \text{Ampere}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \text{Gauss}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

Riemann-Silberstein (RS) Vektor

$$\vec{F}^{(\pm)} = \vec{E} \pm i\vec{B}, \qquad \vec{E},\vec{B}\in\mathbb{R}^3$$

Maxwell-Gl. in RS Form

$$i\partial_t \vec{F}^{(\pm)} = \pm c\,\vec{\nabla}\times\vec{F}^{(\pm)}$$

$$\nabla\vec{F}^{(\pm)} = 0$$

Vektor-Identität

$$\vec{a}\times\vec{b} = -i(\vec{S}\cdot\vec{a})\vec{b}$$

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$$

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell-Gl. in Schrödinger Form

$$i\partial_t \vec{F} = c\,\vec{\nabla}\times\vec{F} =$$
$$= c\left(-i(\vec{S}\cdot\vec{\nabla})\right)\vec{F} \qquad |\cdot\hbar$$

$$\vec{F} = \vec{F}(r,t)$$

$$i\hbar\partial_t\vec{F} = c\left(\vec{S}\cdot(-i\hbar\vec{\nabla})\right)\vec{F}$$
$$= c(\vec{S}\cdot\vec{p})\vec{F}$$

$$\boxed{i\hbar\partial_t\vec{F} = H\vec{F}, \qquad H = c\,\vec{S}\cdot\vec{p}}$$

Photon Schrödinger-Gl. und Hamiltonian in 1. Quantisierung (für ein einzelnes Photon)

Spin 1 Teilchen, lineare Dispersion

Helizität

$$h \equiv \vec{S}\cdot\vec{p}/|\vec{p}|$$

ganzzahligen Spin: $h \to -S, -S+1, \dots, 0, \dots, S-1, S$

halbzahligen Spin: $h \to -S, -S+1, \dots -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \dots S-1, S$

$$\vec{S}^{(1/2)} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\vec{F}^{\pm} = E \pm iB$$

Stationäre Zustände

$$F^+(r,t) = \vec{F}_0^+(r)\cdot e^{+i\omega t}, \qquad F^-(r,t) = \vec{F}_0^-(r)\,e^{-i\hbar\omega t}$$

$$H\vec{F}_0^+ = E\vec{F}_0^+ \qquad\qquad H\vec{F}_0^- = E\vec{F}_0^-$$

$$c(\vec{S}\cdot\vec{p})F_0^+ = \hbar\omega F_0^+ \qquad\qquad -c(\vec{S}\cdot\vec{p})F_0^- = -\hbar\omega F^-$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}^+ \\ \vec{F}^- \end{pmatrix}$$

Alternative Herleitung

Erinnerung: Dirac Gl.

Relativistische Energie-Impuls Relation

$$E = \sqrt{c^2p^2 + (m_0c^2)^2}$$

1\. Quantisierung $\quad \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla} \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad [\vec{r},\vec{p}] = i\hbar$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \sqrt{-c^2\hbar^2\nabla^2 + (m_0c^2)^2}\;\Psi$$ problematisch: ∞ Ordnung in ∇

Quadrierung

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \nabla^2 \psi + \frac{m_0 c^2}{\hbar}\psi = 0$$

Klein-Gordon Gl.
2.te Ordnung in t

Lösung von Dirac: Faktorisierung

$$\left(E^2 - c^2 p^2 - m_0^2 c^4\right) I^{(4)} \psi^D = 0$$

$$\left[E I^{(4)} + \begin{pmatrix} m_0 c^2 I^{(2)} & c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m_0 c^2 I^{(2)} \end{pmatrix}\right] \cdot \left[E I^{(4)} \underset{\uparrow\ \text{minus}}{-} \begin{pmatrix} m_0 c^2 I^{(2)} & c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ c\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m_0 c^2 I^{(2)} \end{pmatrix}\right]\psi^D = 0$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$i\hbar\,\partial_t \psi^D = H_D \psi^D \quad ; \quad H_D = \begin{pmatrix} m_0 c^2 I^{(2)} & -i\hbar c\,\vec{\sigma}\cdot\nabla \\ -i\hbar c\,\vec{\sigma}\cdot\nabla & -m_0 c^2 I^{(2)} \end{pmatrix} = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m_0 c^2$$

Faktorisierung des d'Alembert Operators für Photonen

$$\left(E^2 - c^2 p^2\right) I^{(3)} \psi^P = 0$$

$$\left(E I^{(3)} - c\,\vec{S}\cdot\vec{p}\right)\left(E I^{(3)} + c\cdot\vec{S}\cdot\vec{p}\right)\psi^P - c^2 p\,(p\cdot\psi^P) = 0$$

$$\Uparrow$$

$$E I^{(3)} \psi^P = c\,\vec{S}\cdot\vec{p}\,\psi^P$$

$$p\cdot\psi^P = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar\,\partial_t \psi^P &= c\,\vec{S}\cdot(-i\hbar\vec{\nabla})\psi^P \\ \vec{\nabla}\cdot\psi^P &= 0 \end{aligned}}$$

Maxwell-Gl.
in Schrödinger-Form

→ Nebenbedingung: kommutiert mit Hamiltonian
→ für alle Zeiten erfüllt
falls Bedingung bei $t=0$ erfüllt

1.2. N unterscheidbare Teilchen

Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2m_1}\nabla_{r_1}^2 + V(r_1) - \frac{1}{2m_2}\nabla_{r_2}^2 + V(r_2) - \dots$$

$$= \sum_{j=1}^{N} h_j(\vec r_j) \quad ; \quad h_j(\vec r_j) = -\frac{1}{2m_j}\nabla^2_{\vec r_j} + V(\vec r_j)$$

Einteilchen SG

$$h_j\, \phi_{\alpha_j}(r_j) = \varepsilon_{\alpha_j} \phi_{\alpha_j}(r_j) \quad , \quad \phi_\alpha \in L_2(\mathbb{R}^3) \text{ „quadrat integrabel"}$$

N-Teilchen Zustand

$$\underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(r_1 \dots r_N) = \phi_{\alpha_1}(r_1)\,\phi_{\alpha_2}(r_2) \cdots \phi_{\alpha_N}(r_N) \in L_2(\mathbb{R}^{3N})$$

$$= \langle r_1 r_2 \dots r_N | \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \rangle$$

N-Teilchen SG

$$\underline{H}\, \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(r_1 \dots r_N) = E_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(r_1 \dots r_N)$$

$$E_{\alpha_1 \dots \alpha_N} = \varepsilon_{\alpha_1} + \dots + \varepsilon_{\alpha_N}$$

$\rightarrow$ partielle DGL in 3N-Dimensionen, Randwertproblem

Orthogonalität und Vollständigkeit

$$\langle \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} | \underline{\Phi}_{\beta_1 \dots \beta_N} \rangle = \delta_{\alpha_1, \beta_1} \cdot \delta_{\alpha_2, \beta_2} \cdot \ldots \cdot \delta_{\alpha_N, \beta_N}$$

$$\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_N} | \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \rangle \langle \underline{\Phi}_{\alpha_1 \dots \alpha_N} | = \mathbb{1}$$

1.3 N nicht-unterscheidbare Teilchen

kombinierte Koordinate $\quad x_j = (\vec r_j, s_j) \qquad \int dx = \sum_s \int d^3r$

Transposition

$$P_{ij}\, \underline{\Phi}(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_N) = \underline{\Phi}(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_N)$$

Identität und Inverse

$$P_{jk} P_{jk} = \underline{\mathbb{1}} \qquad (P_{jk}^{-1} P_{jk}) \cdot P_{jk} = P_{jk}^{-1} \qquad P_{jk}^{-1} = P_{jk}$$

Allgemeine Permutation

$$P = \prod P_{jk}$$

Bosonische Zustände

$$P_{ij}\,\Phi^{(+)}(x_1 x_2 \dots x_N) = +\,\Phi^{(+)}(x_1 x_2 \dots x_N) \qquad \text{"symmetrisch"}$$

Bsp.: Phononen, Photonen, α-Teilchen, ...

Fermionische Zustände

Ausdruck des Pauli-Prinzips

$$P_{ij}\,\Phi^{(-)}(x_1 x_2 \dots x_N) = -\,\Phi^{(-)}(x_1 x_2 \dots x_N) \qquad \text{"anti-symmetrisch"}$$

Bsp.: Elektronen, Protonen, Quarks, ...

Symmetrische Zustände

$$\Phi^{(\pm)}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x_1 x_2 \dots x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{\infty} n_j!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{|P|} P\, \phi_{\alpha_1}(x_1)\,\phi_{\alpha_2}(x_2) \dots \phi_{\alpha_N}(x_N)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{\infty} n_j!}} \begin{vmatrix} \phi_{\alpha_1}(x_1) & \phi_{\alpha_1}(x_2) & \dots & \phi_{\alpha_1}(x_N) \\ \phi_{\alpha_2}(x_1) & \phi_{\alpha_2}(x_2) & \dots & \phi_{\alpha_2}(x_N) \\ \vdots & & & \\ \phi_{\alpha_N}(x_1) & \phi_{\alpha_N}(x_2) & \dots & \phi_{\alpha_N}(x_N) \end{vmatrix}_{\pm}$$

Fermionen: $\Phi^{(-)}$, $n_j \in \{0, 1\}$

Bosonen: $\Phi^{(+)}$; $n_j \in \mathbb{N}_0$

Permanente

$$\begin{vmatrix} \phi_a & \phi_b \\ \phi_c & \phi_d \end{vmatrix}_{+} = \phi_a \phi_d + \phi_b \phi_c$$

Laplace Entwicklung

$$\begin{vmatrix} \phi_a & \phi_b & \phi_c \\ \phi_d & \phi_e & \phi_f \\ \phi_g & \phi_h & \phi_i \end{vmatrix}_{+} = \phi_a \begin{vmatrix} \phi_e & \phi_f \\ \phi_h & \phi_i \end{vmatrix}_{+} + \phi_b \begin{vmatrix} \phi_d & \phi_f \\ \phi_g & \phi_i \end{vmatrix}_{+} + \phi_c \begin{vmatrix} \phi_d & \phi_e \\ \phi_g & \phi_h \end{vmatrix}_{+}$$

WF ist eindeutig durch Permanente definiert

WF bis auf globales Vorzeichen bei einer Determinante definiert $\rightarrow$ Anordnung im N-Tupel unbedingt fest.

Satz 1

Die Menge der WF $\{\Phi^{(+)}\}$ und analog $\{\Phi^{(-)}\}$ sind jeweils vollständig in $L_2^{(\pm)}(\mathbb{R}^{3N})$, falls die zugehörige Einteilchenbasis $\{\phi_a\}$ vollständig in $L_2(\mathbb{R}^3)$ ist.

(ohne Beweis)

Korollar 1

Jede beliebige fermionische / bosonische N-Teilchen WF kann durch eine Linearkombination von Determinanten / Permanenten dargestellt werden

$$\Psi^{(\pm)}(x_1 \dots x_N) = \sum_{a_1 \dots a_N} f_{a_1 \dots a_N} \, \Phi^{(\pm)}_{a_1 \dots a_N}(x_1 \dots x_N)$$

II Zweite Quantisierung

2.1. Fock-Raum

Hilbert Raum für N-Teilchen Systeme

$$\mathcal{H}(N) \equiv L_2^{(\pm)}(\mathbb{R}^{3N})$$

Fock-Raum

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}(0) \oplus \mathcal{H}(1) \oplus \mathcal{H}(2) \oplus \mathcal{H}(3) \dots$$
$$= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}(n)$$

Vektoren im Fock-Raum

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \gamma \\ \phi_{\alpha_1}(x_1) \\ \Phi_{\alpha_1\alpha_2}(x_1 x_2) \\ \Phi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x_1 x_2 x_3) \\ \vdots \end{pmatrix} \downarrow \infty$$

$$|0\rangle = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 0 \text{ Teilchen} \\ \leftarrow 1 \text{ Teilchen} \\ \leftarrow 2 \text{ Teilchen} \\ \vdots \\ \end{array} \end{array}$$