

3.3 kohärente Zustände / Glauber Zustände

kohärente Zustände (Glauber-Zustände) sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators

$$\underline{a} |d\rangle = d |d\rangle, \quad \langle d | \underline{a}^\dagger = \langle d | d^*$$

Explizite Form

$$|d\rangle = e^{-|d|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Überprüfung der Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} \underline{a} |d\rangle &= e^{-|d|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{\sqrt{n!}} \underline{a} |n\rangle \\ &= e^{-|d|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= d e^{-|d|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= d |d\rangle \end{aligned}$$

Vakuum ist kohärenter Zustand mit $d=0$

$$\underline{a} |d=0\rangle = 0 \cdot |d=0\rangle = 0$$

Varianz von Ort und Impuls

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_d &= \langle d | x | d \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle d | \underline{a} + \underline{a}^\dagger | d \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (d + d^*) \langle d | d \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (d + d^*) \end{aligned}$$

$$\psi_d(x, t) = \langle x | d(t) \rangle$$

$$\langle x^2 \rangle_d$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_d &= \langle d | x^2 | d \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle d | (\underline{a} + \underline{a}^\dagger)^2 | d \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (1 + (d + d^*)^2) \end{aligned}$$

$$(\Delta x)_d^2 = \langle x^2 \rangle_d - \langle x \rangle_d^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Analog findet man

$$(\Delta p)_d^2 = \frac{\hbar m \omega}{2}$$

Unschärfe Produkt

$$(\Delta x)_d^2 \cdot (\Delta p)_d^2 = \frac{\hbar^2}{4} \rightarrow$$

kohärente Zustände sind
Quartenzustände mit minimaler Unschärfe

Erwartungswert des Teilchenzahl operators

$$\begin{aligned} \langle d | \underline{n} | d \rangle &= \langle d | \underline{a}^\dagger \underline{a} | d \rangle = \langle d | d^\dagger d | d \rangle \\ &= |d|^2 \langle d | d \rangle = |d|^2 \equiv \bar{n} = \langle n \rangle_d \end{aligned}$$

Varianz

$$\begin{aligned} (\Delta n)_d^2 &= \langle d | (n - \bar{n})^2 | d \rangle \\ &= \langle d | n^2 | d \rangle - 2\bar{n} \langle d | n | d \rangle + \bar{n}^2 \langle d | d \rangle \\ &= \langle d | n^2 | d \rangle - \bar{n}^2 \end{aligned}$$

$$n^2 = \underline{a}^\dagger \underline{a} \underline{a}^\dagger \underline{a} = \underline{a}^\dagger \underline{a} + \underline{a}^\dagger \underline{a}^\dagger \underline{a} \underline{a}$$

Normalordnung
"alle kreuzchen nach rechts
durchtauschen"
: $\underline{a}^\dagger \underline{a} \underline{a}^\dagger \underline{a}$:

$$\begin{aligned} \langle d | n^2 | d \rangle &= \langle d | \underline{a}^\dagger \underline{a} | d \rangle + \langle d | \underline{a}^\dagger \underline{a}^\dagger \underline{a} \underline{a} | d \rangle \\ &= d^\dagger d \langle d | d \rangle + d^\dagger d^\dagger d d \cdot \langle d | d \rangle \\ &= \bar{n} + \bar{n}^2 \end{aligned}$$

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \bar{n} = \langle n \rangle$$

Überlapp mit Energieeigenzuständen "Number states", Fock-Zustände

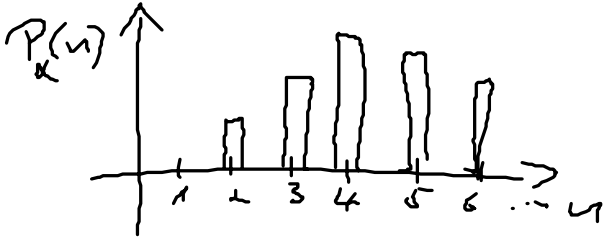
$$\begin{aligned} \langle n | d \rangle &= e^{-|d|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle \\ &= e^{-|d|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{\sqrt{m!}} \delta_{n,m} \quad \downarrow \text{Orthogonalität} \\ &= e^{-|d|^2/2} \frac{d^n}{\sqrt{n!}} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit n Photonen in einem kohärenten Zustand zu finden

$$P_n(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \quad \bar{n} = |\alpha|^2$$

$$= e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!} = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}$$

↑
Poisson Verteilung



Definition: Verschiebungsoperator

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$$

Eigenschaften

- 1) $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$
- 2) $D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha \cdot \mathbb{1}$
- 3) $D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$ ↑ Zahl
- 4) $D(\alpha + \beta) = D(\alpha) D(\beta) e^{-i \text{Im}(\alpha \beta^*)}$

(ohne Beweis)

kohärente Zustände als Verschiebung des Vakuum Zustands

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

Beweis

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$a D(-\alpha)|\alpha\rangle = D(-\alpha) \underbrace{D^\dagger(-\alpha) a D(-\alpha)}_{a - \alpha} D(-\alpha)|\alpha\rangle$$

Eigenschaft 2)

$$= D(-\alpha) \underbrace{(a - \alpha)|\alpha\rangle}_{a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle} = 0$$

$$\underline{\alpha} D(-\alpha) |d\rangle = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= |0\rangle}$

$$D(-\alpha) |d\rangle = |0\rangle \quad (D(\alpha))$$

$$D(\alpha) \underbrace{D(-\alpha)}_{\mathbb{1}} |d\rangle = D(\alpha) |0\rangle$$

$$\underline{|d\rangle = D(\alpha) |0\rangle}$$

3.4 Squeezed states

"komprimierte Zustände"

Definition der Quadratur Operatoren

$$\underline{X} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \underline{q} \quad \text{"out"}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{2i} (\underline{a} - \underline{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \underline{p} \quad \text{"Impuls"}$$

$$[\underline{X}, \underline{Y}] = \frac{i}{2}$$

Elektrischer Feldoperator für einzelne Mode (1M)

$$\underline{E}^{(1)}(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \underline{a}_m \left[\underline{a} e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} - \underline{a}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} \right]$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \underline{a}_m \left[\underline{X} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) - \underline{Y} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \right]$$

Für kohärente Zustände

$$\langle d | \underline{X} | d \rangle = \text{Re } d$$

$$\langle d | \underline{X} + i \underline{Y} | d \rangle = d$$

$$\langle d | \underline{Y} | d \rangle = \text{Im } d$$

$$\langle d | (\underline{X})^2 | d \rangle = \frac{1}{4}$$

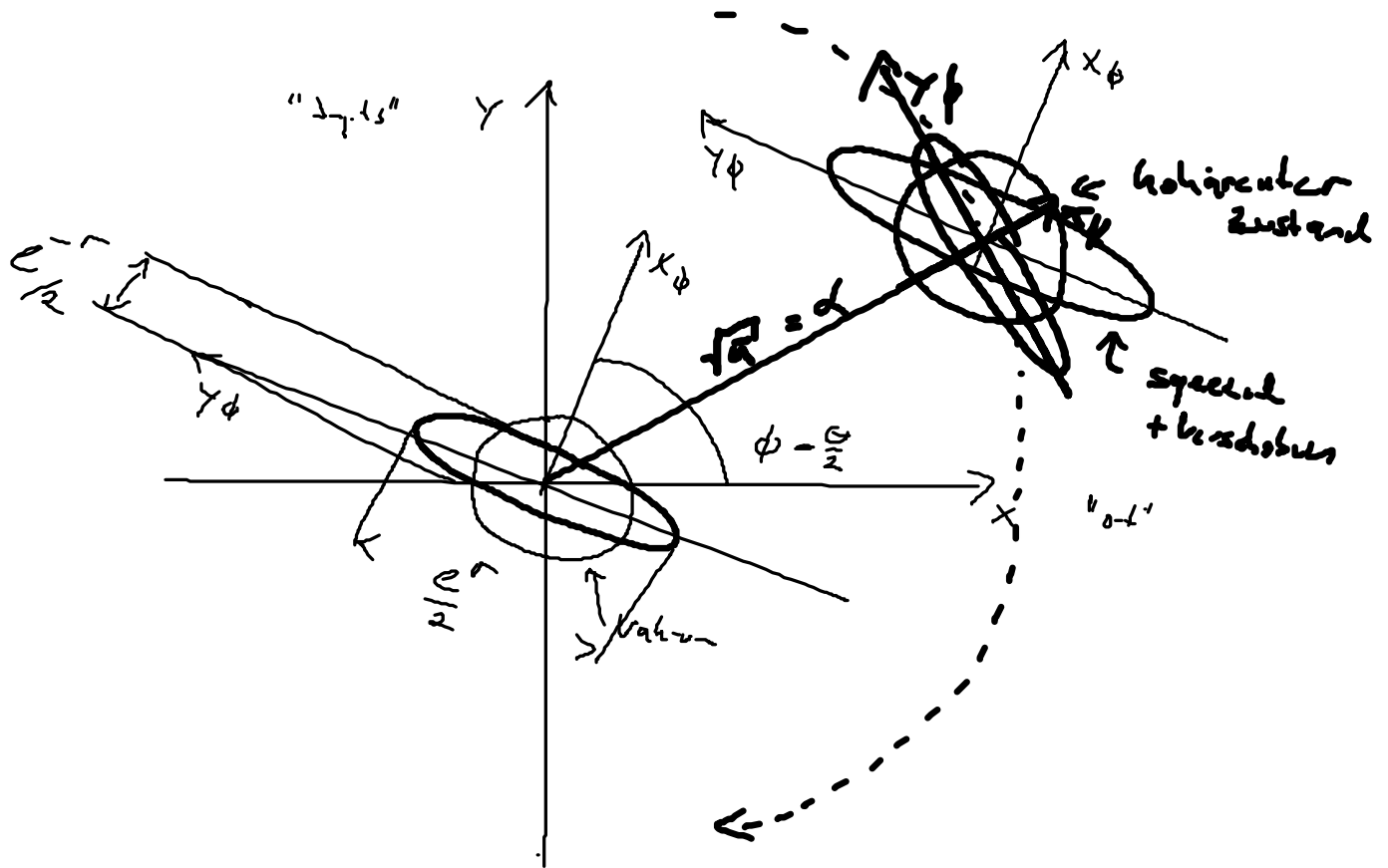
$$\langle d | (\underline{Y})^2 | d \rangle = \frac{1}{4}$$

Rotierte Quadratur Operatoren

$$\underline{X}_\phi = \frac{1}{2} \left(\underline{a} e^{-i\phi} + \underline{a}^\dagger e^{i\phi} \right)$$

$$\underline{Y}_\phi = \frac{1}{2i} (\underline{a} e^{-i\phi} - \underline{a}^\dagger e^{+i\phi})$$

Phasenraum-Darstellung



"Squeeze"-Operator

$$\underline{S}(\eta) \equiv e^{\frac{1}{2} (\eta^* \underline{a}^2 - \eta \underline{a}^{\dagger 2})}, \quad \eta = 0 \Rightarrow \underline{S}(\eta) = \underline{1}$$

keine Kompression

Squeeze-Parameter (in Polarform η)

$$\eta = r e^{i\theta} \quad \eta \in \mathbb{C}, \quad r, \theta \in \mathbb{R}$$

Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{S}(\eta) \underline{a} \underline{S}^\dagger(\eta) \\ &= \underline{a} \cosh r + \underline{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r \\ &= \mu \underline{a} + \nu \underline{a}^\dagger \end{aligned}$$

BCA-Formel

$$\mu \cos \psi r \in \mathbb{R} \quad \psi = e^{i\theta} \sin \psi r \in \mathbb{C}$$

Relation von alternierenden Operatoren

$$\underline{a} = \mu \underline{A} - \psi \underline{A}^+$$

$$\underline{a}^+ = \mu \underline{A}^+ - \psi^* \underline{A}$$

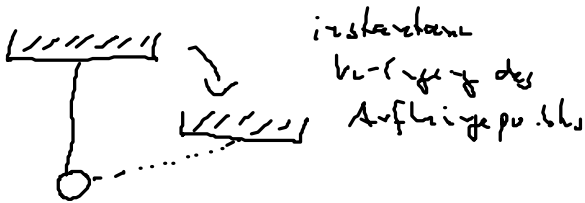
Allgemeine Definition des "Squeezed states"

$$|d, \psi\rangle = D(d) S(\psi) |0\rangle$$

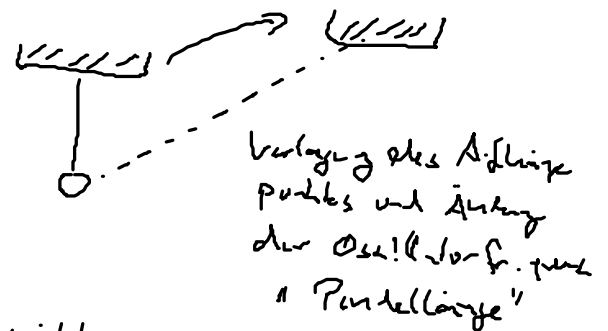
\hookrightarrow Komprimierung um e^{-2r} im R -Modus ϕ
 \hookrightarrow Verstärkung um d

Mechanisches Analogon

Kohärente Zustände



Komprimierte Zustände



Verschiebung und Komprimierung kommutieren nicht

$$D(d) S(\psi) = S(\psi) D(\beta)$$

$$\beta = d \cos \psi r + d^* e^{i\psi} \sin \psi r$$

$$|d(t)\rangle = e^{-iHt} |d\rangle$$

Verschiedene Erwartungswerte

$$\langle d, \psi | \underline{a} | d, \psi \rangle = \mu \beta - \psi \beta = d$$

$$\langle d, \psi | \underline{a}^+ \underline{a} | d, \psi \rangle = \sin^2 \psi r + |d|^2$$

analog

$$\langle d, \psi | (\Delta x)^2 | d, \psi \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r}$$

$$\langle d, \psi | (\Delta p)^2 | d, \psi \rangle = \frac{1}{4} e^{+2r}$$

$$(\Delta x_p)^2 \cdot (\Delta y_p)^2 = \frac{1}{4}$$

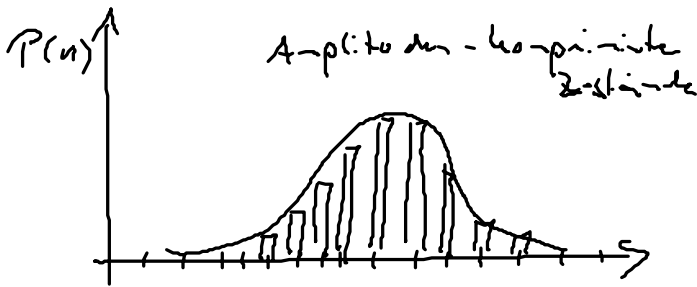
Photon-Statistik von k-primierten Zuständen

Photon Statistik (Population von Energie-Eigenzuständen)

$$P(n) = |\langle n | d, \psi \rangle|^2$$

$$\langle n | d, \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{n! c^{2n}}} \left[\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r \right]^{n/2} e^{-\frac{1}{2}(|d|^2 + \langle d^\dagger e^{i\theta} \tanh r \rangle)} \times H_n \left(\frac{d + d^\dagger e^{i\theta} \tanh r}{(2 e^{i\theta} \tanh r)} \right)$$

Zusammenfassung Photon-Statistik

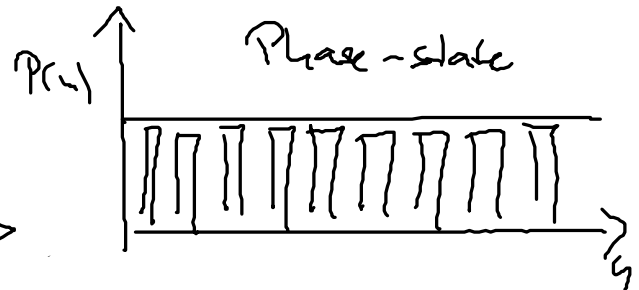
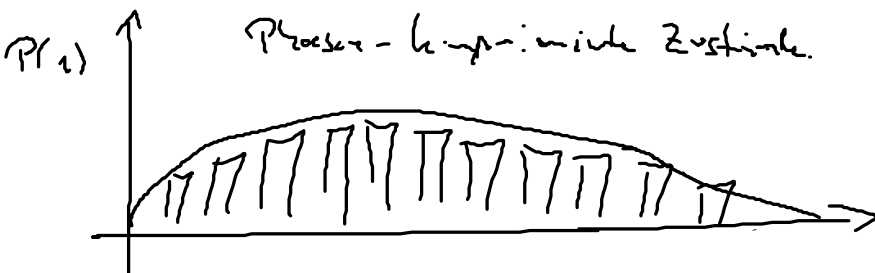


→
coherent
limit



$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}$$

Poisson-Verteilung



geometrische Verteilung

$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}}$$

Bose-Einstein Verteilung