## 2. Elektronenflüssigkeiten: nichtlokalisierte, freibewegliche Elektronen

- im Gegensatz zu in isolierten atomaren Systemen, in denen die Elektronen räumlich lokalisiert sind, treten in Festkörpern (Metalle!) freibewegliche Elektronen auf

- Bewegungsgleichungen f. Elektronenflüssigkeit:

Strom in Maxwellgl. $\vec{j}(\vec{r},t) = n(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)$

$n(\vec{r},t)$ Ladungsdichte, $\vec{v}(\vec{r},t)$ Geschwindigkeitsfeld

dazu sind 2 gekoppelte Gleichungen zu lösen:

Kontinuität: $\partial_t n = -\vec{\nabla}\cdot(n\vec{v})$

Geschwindigkeit: $\partial_t \vec{v} = \underbrace{-\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}}_{\text{nichtlinear}} + \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

Lorentzkraftdichte

$\vec{E}, \vec{B}$ durch Maxwellgl. bestimmt

### a) lineare Antwort

für klein $\vec{v} \to 0$

$$\partial_t \vec{v} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) - \gamma\vec{v}$$

Drude modell

Dämpfung (phänomenologisch)

## b) mittleren Antwort (störungstheoretisch)

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\vec{v}(\vec{r}, t=-\infty)}_{=0} + \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \left\{ \frac{q}{m} \left( \vec{E}(t') + \vec{v}(t') \times \vec{B}(t') \right) - \vec{v}(t') \cdot \vec{\nabla} \, \vec{v}(t') \right\}$$

in 0-ter Ordnung: heißt $E, B = 0$

$$\vec{v}^{(0)} = \vec{v}(-\infty) = 0$$

in 1.-ter Ordnung: $\vec{v}^{(0)}$ einsetzen rechts

$$\vec{v}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \frac{q}{m_{\text{eff}}} \vec{E}(t')$$

$\leftarrow$ im FK

$$\dot{\vec{v}}^{(1)}(t) = -\gamma \vec{v}^{(1)}(t) + \frac{q}{m} \vec{E}(t)$$ Drude

in 2.-ter Ordnung: $\vec{v}^{(1)}$ und setzen wieder ein

$$\vec{v}^{(2)}(t) = \vec{v}^{(1)}(t) + \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \left\{ \frac{q}{m} \vec{v}^{(1)}(t') \times \vec{B}(t') - \vec{v}^{(1)}(t') \cdot \vec{\nabla} \vec{v}^{(1)}(t') \right\}$$

$$\dot{\vec v}^{(2)}(t) = -\gamma \vec v^{(2)} + \frac{q}{m}\vec E + \underbrace{\frac{q}{m}\vec v^{(1)}\times\vec B - \vec v^{(1)}\cdot\vec\nabla\, \vec v^{(1)}}_{}$$

nichtlin. Anteil:

u.a. → Lichtkraft

ebene Welle:

$\vec E \times \vec B$ → Kraft in Ausbreitungsrichtg.

<u>optisches Feld:</u>

Vektor

$$\vec E = \frac{1}{2}\, \tilde{\vec E}(\vec r, t)\, e^{-i\omega_L t} + c.c.$$

(analog f. $\vec B$-Feld), $\vec B$ durch $\vec E$ ausdrücken:

$$\vec\nabla \times \vec E = -\partial_t \vec B, \quad \text{mit lgs. Amplitudennäherung:}$$

$$\vec\nabla \times \tilde{\vec E} e^{-i\omega_L t} + \vec\nabla \times \tilde{\vec E}^{*} e^{i\omega_L t} = i\omega_L \tilde{\vec B} e^{-i\omega_L t} - i\omega_L \tilde{\vec B}^{*} e^{+i\omega_L t}$$

Trennung d. Frequenzen

$$i\omega_L \tilde{\vec B} = \vec\nabla \times \tilde{\vec E}, \quad -i\omega_L \tilde{\vec B}^{*} = \vec\nabla \times \tilde{\vec E}^{*}$$

$$\dot{\vec v}^{(2)}\Big|_{\text{nichtlinear}} = \frac{q}{m}\vec v^{(1)} \times \vec B - \vec v^{(1)} \cdot \vec\nabla\, \vec v^{(1)}$$

linear v. $\vec v^{(1)}$

$$\dot{\vec{v}}^{(1)} = \frac{q}{m}\vec{E} \quad , \text{ in kompl. Amplitude}$$

$$-i\omega_L \underline{\underline{\tilde{v}^{(1)}}} e^{-i\omega_L t} + i\omega_L \tilde{v}^* e^{i\omega_L t} = \underline{\underline{\frac{q}{m}}}\left(\tilde{E} e^{-i\omega_L t} + \tilde{E}^* e^{i\omega_L t}\right)$$

$$\tilde{v}^{(1)} = i\frac{q}{m\omega_L}\tilde{E} \qquad \text{ohne Dämpfg. !}$$

$$\tilde{v}^{*(1)} = -i\frac{q}{m\omega_L}\tilde{E}^*$$

$-2, 2, 0$

$$v^{(2)}\Big|_{\text{mitteln}} = \sum_{n=-2}^{2} e^{i\omega_L n t} V_n^{(2)} \frac{1}{2}$$

jetzt nur optisch gleichrichtg such also Terme mit $n=0$

$$\boxed{v = \frac{\tilde{v}^*}{2} e^{i\omega_L t} + \frac{\tilde{v}}{2} e^{-i\omega_L t}}$$

$$\dot{\tilde{v}}_0^{(2)}\Big|_{nl} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\left(\tilde{v}^{(1)} \times \tilde{B}^* + \underbrace{\tilde{v}^{*(1)} \times \tilde{B}}_{c.c.}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\tilde{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}\,\tilde{v}^{*(1)} + \underbrace{\tilde{v}^{*(1)} \cdot \vec{\nabla}\,\tilde{v}^{(1)}}_{c.c.}\right)$$

Maxwell

durch $\tilde{v}^{*(1)}$ rauswerfen

$$\tilde{v}^{(1)} \times \tilde{B}^* = \tilde{v}^{(1)} \times \frac{(\vec{\nabla} \times \tilde{E}^*)}{-i\omega_L} = \frac{1}{-i\omega_L}\tilde{v}^{(1)} \times \left(\vec{\nabla} \times \tilde{v}^{*(1)}\right) \cdot \frac{m\omega_L}{-iq}$$

$$= -\frac{m}{q}\, \tilde{v}^{(1)} \times \left( \vec{\nabla} \times \tilde{v}^{(1)*} \right) \cdots$$

$$\dot{\tilde{v}}_0^{(2)}\Big|_{nl} = -\frac{1}{2} \left( \tilde{v}^{(1)} \times \vec{\nabla} \times \tilde{v}_1^{*(1)} + \tilde{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}\, \tilde{v}^{(1)*} + c.c. \right)$$

es gilt:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} + \vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)$$

$$\vec{a} = \tilde{v}^{(1)}, \quad b = \tilde{v}^{(1)*}$$

$$\dot{\tilde{V}}_0^{(2)}\Big|_{nl} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \left( \tilde{v}^{(1)} \cdot \tilde{v}^{*(1)} \right)$$

$$\dot{\tilde{V}}_0^{(2)}\Big|_{nl} = -\vec{\nabla} \underbrace{\left( \frac{q^2}{2 m^2 \omega_c^2} \left| \tilde{E}(\vec{r},t) \right|^2 \right)}_{\text{Kraft auf Teilchen}}$$

Bemerkungen:

a) offensichtlich wirkt die Lichtintensität des eingestrahlten opt. Feldes als räumlich variables Potential: in Form einer Newtongleichung:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{f}_p = -\vec{\nabla}\, \phi_p$$

ponderomotive Kraft ponderomotives Potential

$$\phi_P = \frac{q^2}{2m^2\omega_L} \left| \tilde{E}(\vec{r}, t) \right|^2$$

b) Bewegungsprofil ist auf Newtonmechanik zurückgeführt (f. Probeteilchen)

c) <u>starke</u> Dämpfg. $\gamma$:

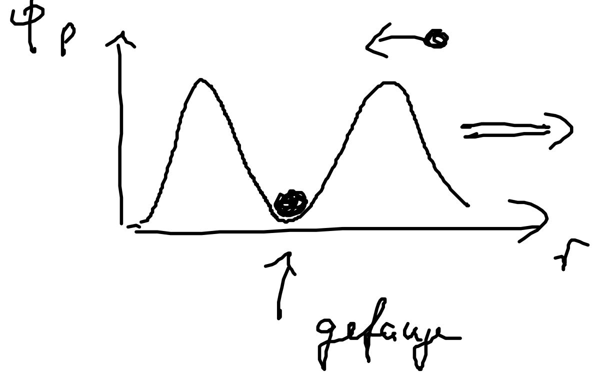
$$\cancel{\dot{\tilde{v}}_0^{(2)}} = \underbrace{-\gamma\, \tilde{v}_0^{(2)}}_{\text{dominant}} + \vec{f}_P$$

$$\tilde{v}_0^{(2)} \sim \vec{\nabla} \phi_P$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{v}_0^{(2)} = 0 \quad \text{f.} \quad \vec{\nabla} \phi_P = 0$$

an diesen Stellen verschwindet die Kraft.!

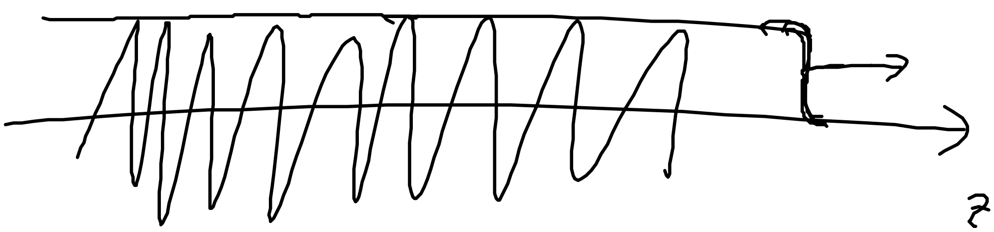
Probeteilchen sammeln sich in den Intensitätsminima an

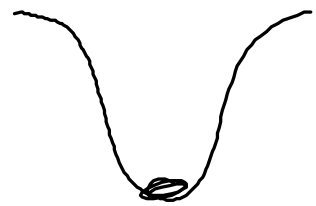


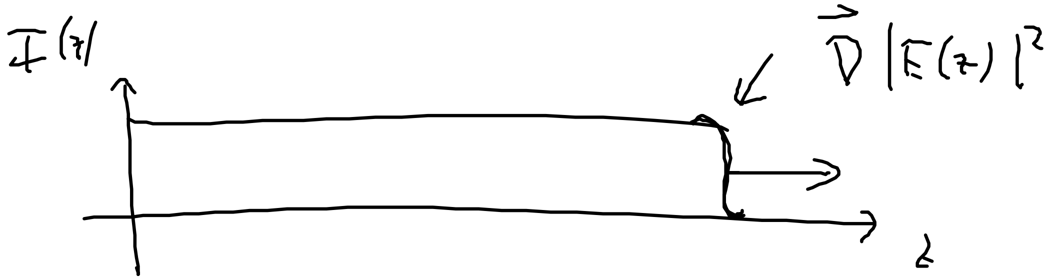

$\Longrightarrow$ Bewgg. d. Lasers $\rightarrow$ optische Pinzette

d/ gilt auch f. polarisierbare Teilchen

<u>ebene Welle</u>:

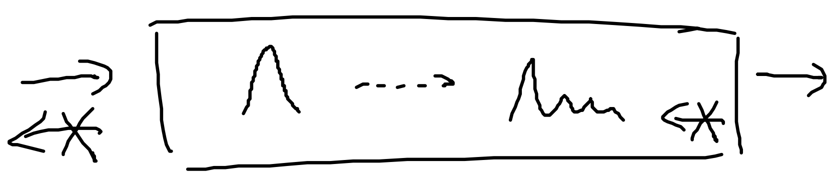




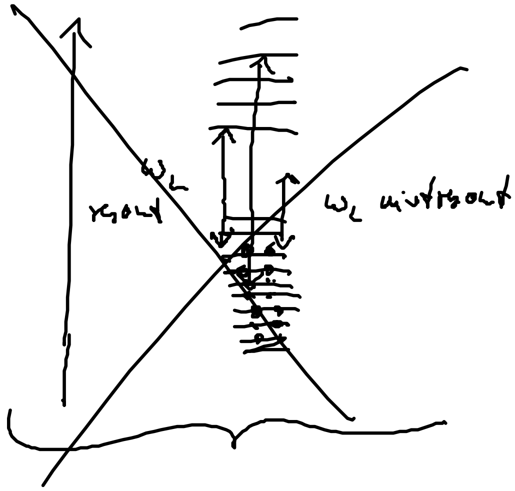

## VII Lichtausbreitung in ausgedehnten Medien: Amplitudengleichung

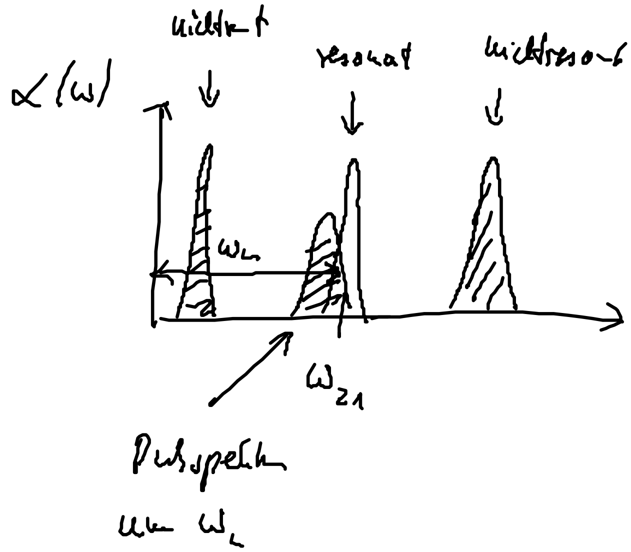
Vorwärtsbewegg. v. Lichtpulsen in Medien



ohne Reflexion, <u>nur</u> vorwärts laufende Wellen

Proben / Materie $\rightarrow$ optische Response



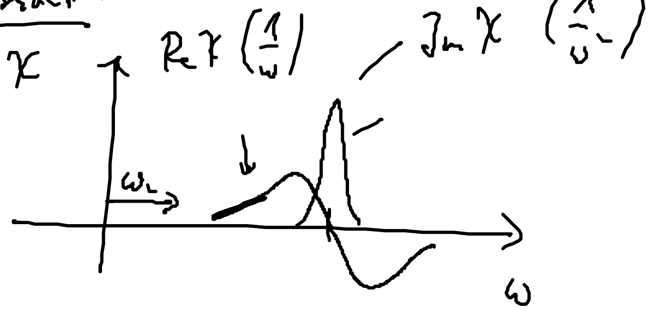




2 Art v. Dipoldichte: $\vec{P} = \vec{P}_{nr} + \vec{P}_{res}$

$\omega_L \ll\gg \omega_{ij}$ $\qquad$ $\omega_L \approx \omega_{nm}$

Unterteilung in resonante Antwort u. nichtresonante Antwort

<u>nichtresonant:</u>




die nichtresonanten Übergänge werden d. Brechzahl $n(\omega)$ repräsentiert

<u>resonant:</u> Einschränkung auf 2NS

<u>Herleitung d. Amplitudengleichung:</u>

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 (\vec{P}_{res} + \vec{P}_{nr})$$

$$\vec{P}_{nr} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega) \quad , \text{ sei linear}$$

$$\rightarrow \Delta \vec{E}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{res}(\omega) - \mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega)$$

$$\Delta \vec{E}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \underbrace{(1 + \chi(\omega))}_{n^2(\omega)} \vec{E}(\omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{res}(\omega) \qquad \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Def. d. Brechzahl: $1 + \chi(\omega) = n^2(\omega)$

in Analogie zu freiem Laserstrahl ähnliche Amplitudengleichg. ableiten

Vakuum: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_L t + ik_L z} \qquad \omega_L = c k_L$

Materie: $\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \tilde{E}(\vec{r}_\perp, z, \omega) e^{ik(\omega) z}$

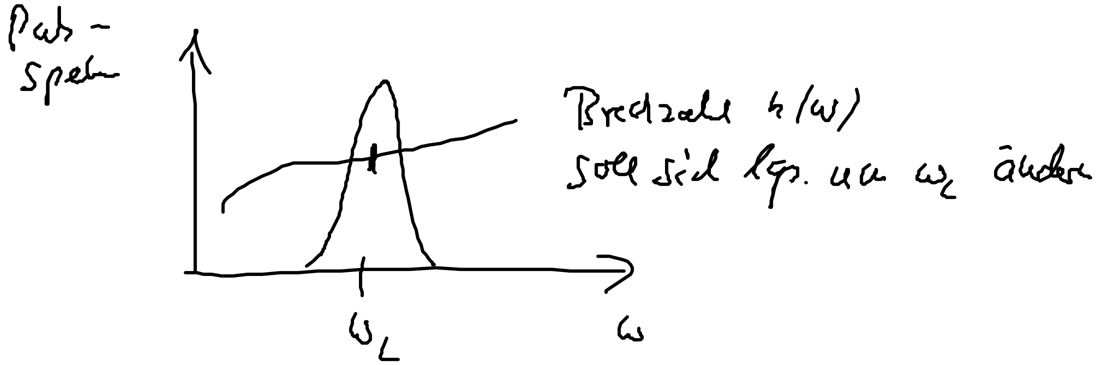
$k(\omega)$ ist noch zu bestimmen

Hilfsfunktion: $\frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) = f(\omega)$

in Wellengl. einsetzen: $\partial_z^2$ ausführen:

$$\Delta_\parallel \tilde{E} + \cancel{\partial_z^2 \tilde{E}} + 2i\underline{\underline{k(\omega)}}\,\partial_z \tilde{E} - k(\omega)^2 \tilde{E} + f(\omega)^2 \tilde{E} = -\mu_0 \omega^2 \tilde{P}_{res}(\omega)$$

aufg. fs-Pulse, lgs. Amplitude, analyt. Ansatz f. $\vec{P}_{res}$.




<u>Idee</u>: $f(\omega)$ in Reihe um $\omega_L$ entwickeln

$$(f^2 - k^2) = (f-k)\underbrace{(f+k)}_{} \approx (f-k)\,2k$$

etwa gleich
(im Vakuum exakt)

Reihe
↓
$$= \Big(\underline{\underline{f(\omega_L)}} + f'(\omega_L)\underbrace{\Delta\omega}_{\omega-\omega_L} + \frac{1}{2} f''(\omega_L)\Delta\omega^2 - \underline{\underline{k(\omega)}}\Big)\,2k(\omega)$$

$k(\omega)$ wählen: $\quad k(\omega) \equiv f(\omega_L) = f_L$

$$f_L = \frac{n(\omega_L)\,\omega_L}{c} \equiv k_L$$ Wellenzahl einer Welle in Medium

einsetzen in Wellengl. und auf $2ik(\omega) = 2ik_L$ dividieren

$$\underbrace{\left(\frac{\Delta_\perp}{2ik_L}\right.}_{\substack{\text{Gaußpuls}\\ \text{aber mit}\\ \text{korrekter Brechzahl } n(\omega_L)}} + \partial_z \underbrace{- i f_L' \Delta\omega - \frac{i}{2} f_L'' \Delta\omega_L^2}_{\text{Korrektur f. Puls}}\left.\right)\tilde{E}(\omega) = \frac{i\mu_0\omega^2}{2k_L}\tilde{P}_{NL}(\omega)$$

Zurück in Zeitraum:

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\Delta\omega t}\tilde{E}(t)$$

$$\tilde{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\Delta\omega t}\tilde{E}(\omega)$$

auf rechter Seite $\omega^2 \rightarrow \omega_L^2$

$$\left(\frac{\Delta_\perp}{2ik_L} + \partial_z + f_L'\partial_t + \frac{i}{2}f_L''\partial_t^2\right)\tilde{E}(\vec{r},t) = i\frac{k_L}{2n_L^2}\frac{\tilde{P}_{NL}(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

Umformen auf rechter Seite: $\mu_0\frac{\omega_L^2}{k_L} = \underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{\frac{1}{c^2}}\frac{\omega_L^2}{k_L\varepsilon_0} = \frac{\omega_L^2}{c^2k_L^2}\frac{k_L}{\varepsilon_0} = \frac{1}{n_L^2}\frac{k_L}{\varepsilon_0}$