

4.4 Erste Ordnung optische Kohärenz

Visibility

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{G^{(1)}(x_1 x_1) + G^{(1)}(x_2 x_2) + 2G^{(1)}(x_1 x_2) - (G^{(1)}(x_1 x_1) + G^{(1)}(x_2 x_2) - 2G^{(1)}(x_1 x_2))}{2G^{(1)}(x_1 x_1) + 2G^{(1)}(x_2 x_2)}$$

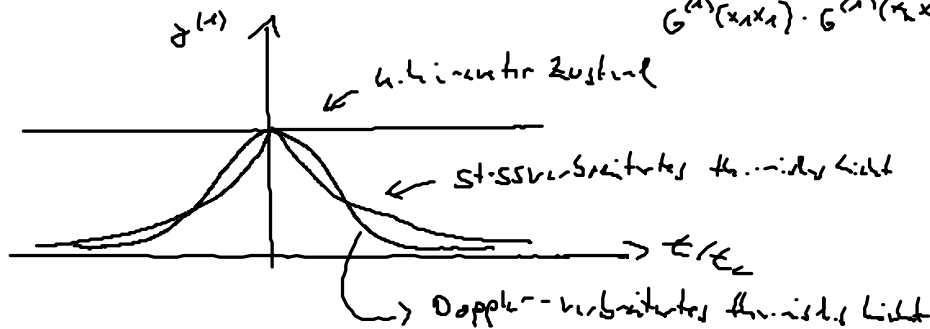
$$= \frac{|G^{(1)}(x_1 x_2)|}{\sqrt{G^{(1)}(x_1 x_1) G^{(1)}(x_2 x_2)}} \cdot \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Erste Ordnung optische Kohärenz

$$g^{(1)}(x_1 x_2) = \frac{|G^{(1)}(x_1 x_2)|}{\sqrt{G^{(1)}(x_1 x_1) G^{(1)}(x_2 x_2)}} \leq 1$$

↑ aufgrund von unvollständiger Schwellenvergleichung

$$G^{(1)}(x_1 x_1) \cdot G^{(1)}(x_2 x_2) \geq |G^{(1)}(x_1 x_2)|^2$$



τ_c - Kohärenzzeit des Lichts

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^-(t) E^-(t+\tau) \rangle}{\langle E^-(t) E^-(t) \rangle}$$

4.5 Zweite Ordnung optische Kohärenz

$$G^{(2)}(x_1 x_2 x_1' x_2') = \langle E^-(x_1) E^-(x_2) E^+(x_1') E^+(x_2') \rangle$$

↳ Notwendig zur Beschreibung v.a. z.B. Hanbury-Brown-Twiss Experiment
Einerlei Detektor, korrelierende Messung von zwei Photonen
mit zeitverzögerung τ am gleichen Ort \vec{r}

$$x_1 = (r, t) \quad x_1' = (r, t + \tau)$$

$$x_2 = (r, t + \tau) \quad x_2' = (r, t)$$

$$\rightarrow G^{(4)}(r, r) = \langle E^-(rt) E^-(rt+r) E^+(rt+r) E^+(rt) \rangle$$

Normierte Korrelationsfunktion zweite Ordnung

$$g^{(4)}(x_1, x_2, x_1, x_1) = \frac{\langle E^-(x_1) E^-(x_2) E^+(x_2) E^+(x_1) \rangle}{\langle E^-(x_1) E^+(x_1) \rangle \langle E^-(x_2) E^+(x_2) \rangle}$$

$$= \frac{G^{(4)}(x_1, x_2, x_1, x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1) \cdot G^{(1)}(x_2, x_2)}$$

Beispiel für einzelne A. d. e.

$$g^{(4)}(\tau) = \frac{\langle a^+(0) a^+(\tau) a(\tau) a(0) \rangle}{\langle a^+(0) a(0) \rangle^2}$$

$$= \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 + \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}$$

a) Fock Zustände $|n\rangle$

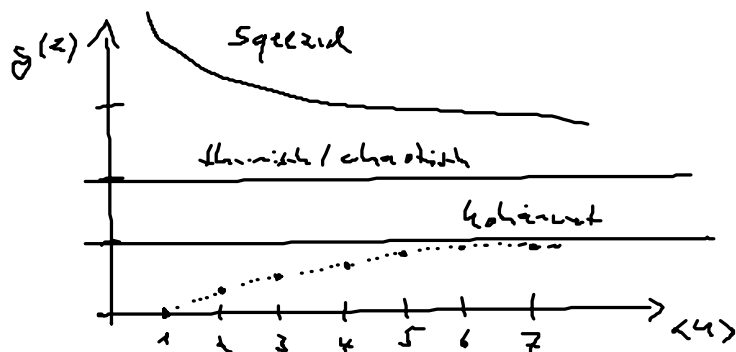
$$g^{(2)}(\tau) = \begin{cases} 0 & n=0,1 \\ \frac{n-1}{n} & n \geq 2 \end{cases}$$

b) kohärente Zustände

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle \rightarrow g^{(2)}(\tau) = 1$$

c) thermische Zustände

$$g^{(2)}(\tau) = 2 \quad (\text{diese Regel})$$



Klassifizierung von Lichtfeldern

$$g^{(2)} = 1 \quad \text{Poissonian}$$

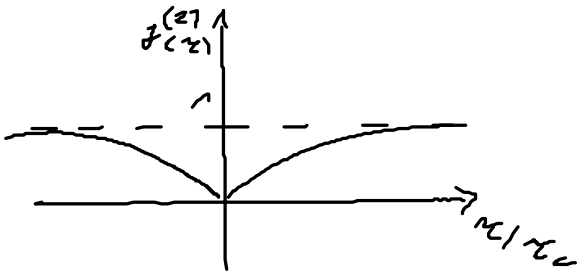
$$g^{(2)} > 1 \quad \text{super-Poissonian}$$

$$g^{(2)} < 1 \quad \text{Sub-Poissonian}$$

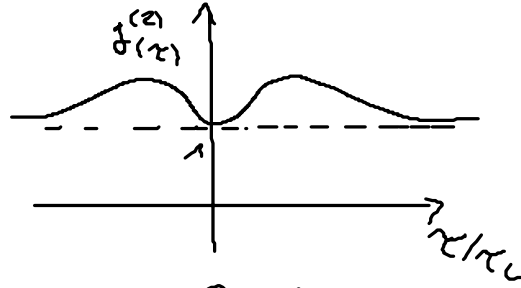
Photon Bunching / Anti-Bunching

$$g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0) \quad : \quad \text{Photon Bunching} \quad \dots \dots \dots$$

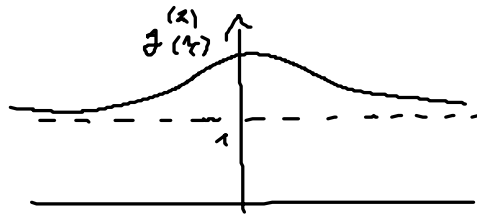
$$g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0) \quad : \quad \text{Photon anti-bunching} \quad \dots \dots \dots$$



Sub-Poissonian
anti-bunched



Super-Poissonian
anti-bunched



Super-Poissonian
bunched "light"

5 Quantermechanische Beschreibung von Materie-Feld Wechselwirkung

5.1 Hamilton-Operat. für Materie-Feld Wechselwirkung

Ausblick:

1) Startpunkt ist Lagrange-dichte der Quantenelektrodynamik (QED)

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{\psi} \bar{\psi}(x) (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m c^2 \psi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$$

$$\underline{D}_\mu(x) = \partial_\mu + ie \underline{A}_\mu(x) \quad ; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu \underline{A}_\nu(x) - \partial_\nu \underline{A}_\mu(x)$$

Lagrange

$$\underline{L} = \int dx \mathcal{L}(x)$$

2) Forderung der Eichung (z.B. Coulomb)

3) Übergang von Lagrange-Funktion zu Hamiltonian

4) QED Hamiltonian

Normalisierung

$$\underline{H}_{\text{at}} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{EM} + \underline{H}_{int}$$

$$\underline{H}_0 = \sum_u \int d^3r : \underline{\psi}_u(\vec{r}) (-i\hbar c \vec{\mu} \vec{\nabla} + m_u c^2) \underline{\psi}_u :$$

$$\underline{H}_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r : (\underline{E}^2(\vec{r}) + c^2 \underline{B}^2(\vec{r})) :$$

$$\underline{H}_{int} = -\frac{1}{2} \int d^3r : \underline{j}(\vec{r}) \cdot \underline{A}(\vec{r}) \quad \text{"Minimal coupling"}$$

- 5) Nichtrelativistischer Limit \rightarrow Pauli-Fierz Hamiltonian
- 6) Dipol-Näherung
- 7) Nichtrelativistisches Dipol-Hamiltonian

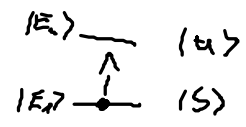
$$\underline{H}_{NR-D} = \underline{H}_A + \underline{H}_{EM} + \underline{H}_{int}$$

$$\underline{H}_A = \sum_j \epsilon_j |E_j\rangle \langle E_j| \quad \underline{H}_A |E_j\rangle = \epsilon_j |E_j\rangle$$

$$\underline{H}_{EM} = \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}, \lambda}^\dagger a_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\underline{H}_{int} = -e \vec{r} \cdot \underline{E} \quad \text{Dipolnäherung}$$

- 8) Limit von zwei abstrakten Niveaus
- 9) Drehmomentnäherung
- 10) Wigner-Eckart-Satz



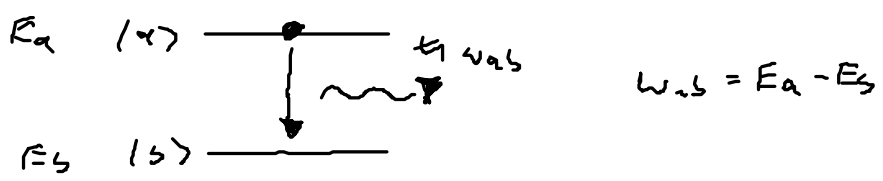
$$\underline{H}_{NR-D-RWA-I} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} g_{\vec{k}, \lambda} \sigma_+ a_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\omega_{as} - \omega_{\vec{k}})t} + \text{H.c.}$$

Herleitung von Schritt 1-10 im separaten Vorlesung

5.2 Wigner-Eckart Theorie zur spontanen Emission

Modell: Zwei-Niveau System gekoppelt an ein Kontinuum von elektromagnetischen Feldmoden

Annahme: Atom ist initial in angeregten Zustand, Feld in Vakuum



Ziel: Zeitentwicklung der Wellenfunktion, Langzeitverhalten für $t \rightarrow \infty$

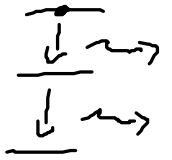
Hamilton-Operator in W-Bild

$$H_I = \epsilon \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{1}{\hbar} \hat{p}_{\vec{k}, \lambda} \sigma_+ + \text{h.c.} e^{i(\omega_{ab} - \omega_{\vec{k}, \lambda})t} + \text{h.c.}$$

Zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = H_I |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

Anfangsbedingung: $|\psi(t=0)\rangle = |a\rangle|0\rangle = |a, 0\rangle$



Ansatz für zeitabhängige Wellenfunktion

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\vec{k}, \lambda} c_{b, \vec{k}, \lambda}(t) |b, 1_{\vec{k}, \lambda}\rangle \quad (2)$$

Atom im angeregten Zustand
Feld im Vakuum

Atom im Grundzustand
ein Photon im Feld in Mode \vec{k}, λ

$$|0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\rangle$$

↑ Mode \vec{k}, λ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots\rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 1, 0, \dots\rangle$$

Aufgrund der Anfangsbedingung

$$c_a(t=0) = 1, \quad c_{b, \vec{k}, \lambda}(t=0) = 0$$

Einsetzen von (2) in (1)

$$\begin{aligned} & i\epsilon \left\{ \dot{c}_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\vec{k}, \lambda} \dot{c}_{b, \vec{k}, \lambda}(t) |b, 1_{\vec{k}, \lambda}\rangle \right\} \\ &= \epsilon \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ \hat{p}_{\vec{k}, \lambda} \sigma_+ + \text{h.c.} e^{i(\omega_{ab} - \omega_{\vec{k}, \lambda})t} + \hat{p}_{\vec{k}, \lambda} \sigma_- + \text{h.c.} e^{-i(\omega_{ab} - \omega_{\vec{k}, \lambda})t} \right\} \\ & \quad \times \left\{ c_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\vec{k}', \lambda'} c_{b, \vec{k}', \lambda'}(t) |b, 1_{\vec{k}', \lambda'}\rangle \right\} \\ &= \epsilon \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ c_a(t) \hat{p}_{\vec{k}, \lambda} e^{-i(\omega_{ab} - \omega_{\vec{k}, \lambda})t} |b, 1_{\vec{k}, \lambda}\rangle + \hat{p}_{\vec{k}, \lambda} c_{b, \vec{k}, \lambda}(t) e^{+i(\omega_{ab} - \omega_{\vec{k}, \lambda})t} |a, 0\rangle \right\} \end{aligned}$$

Projektion mit $\langle a, 0 |$

$$\Rightarrow i\epsilon \dot{c}_a(t) = \epsilon \sum_{\vec{k}, \lambda} \hat{p}_{\vec{k}, \lambda} e^{+i(\omega_{ab} - \omega_{\vec{k}, \lambda})t} c_{b, \vec{k}, \lambda}(t) \quad (3)$$

Projektion mit $\langle b, 1_{\vec{k}, \lambda} |$

$$i\epsilon \dot{c}_{b, \vec{k}, \lambda}(t) = \epsilon \hat{p}_{\vec{k}, \lambda} e^{-i(\omega_{ab} - \omega_{\vec{k}, \lambda})t} c_a(t) \quad (4)$$

Integration von (4)

$$c_{\vec{k}\lambda}(t) = -i g_{\vec{k}\lambda} \int_0^t e^{-i(\omega_{\vec{k}\beta} - \omega_{\vec{k}\lambda})t'} c_{\alpha}(t') dt' \quad (5)$$

Einsetzen in (3)

$$\dot{c}_{\alpha}(t) = - \sum_{\vec{k}\lambda} |g_{\vec{k}\lambda}|^2 \int_0^t c_{\alpha}(t') e^{i(\omega_{\vec{k}\beta} - \omega_{\vec{k}\lambda})(t-t')} dt' \quad (6)$$

Kontinuierlicher Limit für k-Summe

$$\sum_{\vec{k}\lambda} \rightarrow 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} k^2 dk \quad \omega = ck$$

$$|g_{\vec{k}\lambda}|^2 = \frac{\omega_{\vec{k}\lambda}}{2\epsilon_0 V} \cos\theta |\langle \alpha | \vec{r} | \beta \rangle|^2$$

\uparrow Winkel zwischen
 aktiven Dipol und \vec{k}

\uparrow Dipolmatrixelemente

Einsetzen in (6)

$$\dot{c}_{\alpha}(t) = - \frac{4 |\langle \alpha | \vec{r} | \beta \rangle|^2}{(2\pi)^3 6 \epsilon_0 \hbar^3 c^3} \int_0^{\infty} \omega^3 d\omega \int_0^t c_{\alpha}(t') e^{i(\omega_{\beta} - \omega_{\alpha})(t-t')} dt'$$

Markov-Limit

$$\int_0^t c_{\alpha}(t') \dots dt' = c_{\alpha}(t) \int_0^t \dots dt'$$

vor Zustand zur aktuellen Zeit, nicht jedoch vor vergangenen
 Zeiten spielt in c.Rolle

Langelimit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{i(\omega_{\beta} - \omega_{\alpha})(t-t')} dt' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega_{\beta} - \omega_{\alpha})t}{\omega_{\beta} - \omega_{\alpha}} + \frac{1 - \cos(\omega_{\beta} - \omega_{\alpha})t}{i(\omega_{\beta} - \omega_{\alpha})}$$

$$= \pi \delta(\omega_{ab} - \omega_k) - iP \frac{1}{\omega_{ab} - \omega_k}$$

$$\dot{c}_a(t) = - \frac{4|\langle a | \vec{r} | b \rangle|^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \left[\int_0^\infty \omega_k^3 \delta(\omega_{ab} - \omega_k) d\omega_k - iP \int_0^\infty \frac{\omega_k^3}{\omega_{ab} - \omega_k} d\omega_k \right] c_a(t)$$

Cauchy Hauptwert
"Principal value!"

Imaginärteil sorgt für
Frequenz shift = Lamb-Shift
Integral divergiert: QED Renormierung
führt zu unendlich Wert

(ohne Lamb-Shift)

$$= - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{4|\langle a | \vec{r} | b \rangle|^2}{3\pi \epsilon_0 c^3} \omega_{ab}^3}_{:= A} \cdot c_a(t)$$

$$= - \frac{1}{2} A c_a(t)$$

$$A = \frac{4|\langle a | \vec{r} | b \rangle|^2 \omega_{ab}^3}{3\pi \epsilon_0 c^3}$$

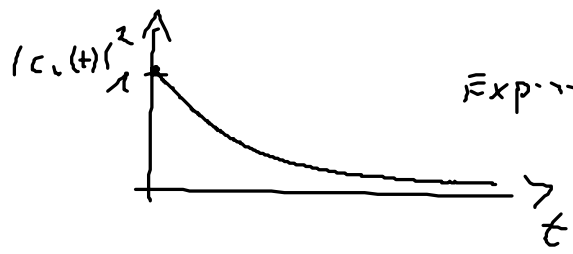
Einstein A Koeffizient
für spontane Emission

Lösung der Dgl

$$\dot{c}_a(t) = - \frac{1}{2} A c_a(t), \quad c_a(t) = e^{-\frac{A}{2} t}$$

Populanz des angeregten Niveaus

$$p_a(t) = |c_a(t)|^2 = e^{-A t}$$



Exponentielle Zufall der Pop.-Lebensdauer
mit Rate A

$$\text{Lebensdauer } \tau = \frac{1}{A}$$

Beispiel: Übergang 2P → 1S von atomarem Wasserstoff

$$\Delta \tau = \frac{1}{A} \approx 1.6 \text{ ns}$$

Lebensdauer des angeregten Zustands

$$\Delta l = c \cdot \Delta \tau \approx 48 \text{ cm}$$

"Länge des Lichtpuls"

