

4.4 Erste Ordnung optische Kohärenz

Visibility

$$v = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{G^{(1)}(x_1, x_2) + G^{(1)}(x_2, x_1) + 2G^{(1)}(x_1, x_2) - (G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) - 2G^{(1)}(x_1, x_2))}{2G^{(1)}(x_1, x_1) + 2G^{(1)}(x_2, x_2)}$$

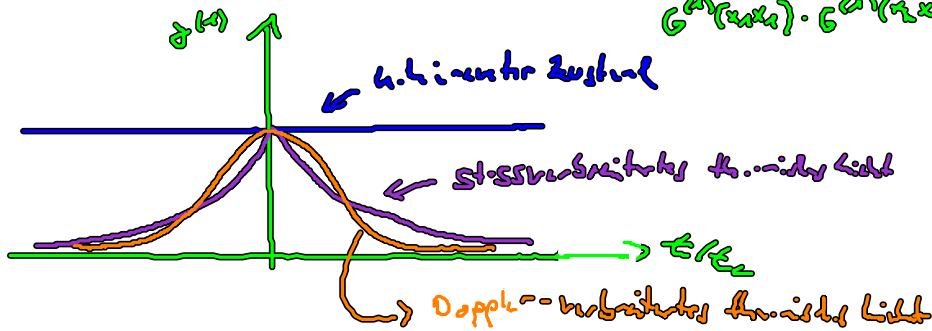
$$= \frac{|G^{(1)}(x_1, x_2)|}{\sqrt{G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2)}} \cdot \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Erste Ordnung optische Kohärenz

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{|G^{(1)}(x_1, x_2)|}{\sqrt{G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2)}} \leq 1$$

↑ aufgrund von unvollständiger Schlieren-Objektivierung

$$G^{(1)}(x_1, x_1) \cdot G^{(1)}(x_2, x_2) \geq |G^{(1)}(x_1, x_2)|^2$$



r_c - Kohärenzlänge des Lichts

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t) E^*(t+\tau) \rangle}{\langle E^*(t) E^*(t) \rangle}$$

4.5 Zweite Ordnung optische Kohärenz

$$G^{(2)}(x_1, x_2, x_1', x_2') = \langle E^*(x_1) E^*(x_2) E^*(x_1') E^*(x_2') \rangle$$

↳ Notwendig u. Bedingung v. z.B. Hanbury-Brown-Twiss Experiment
Erneuter Detektor-, koinzidenz-Messung von zwei Photonen
mit zeitverzögerung τ an gleichem Ort \vec{r}

$$x_1 = (r, t) \quad x_1' = (r, t + \tau)$$

$$x_2 = (r, t + \tau) \quad x_2 = (r, t)$$

$$\rightarrow G^{(4)}(r, \tau) = \langle E^-(r+t) E^-(r+t+\tau) E^+(r+t+\tau) E^+(r+t) \rangle$$

Normierte Korrelationsfunktion zweiter Ordnung

$$g^{(2)}(x_1, x_2, x_1, x_2) = \frac{\langle E^-(x_1) E^-(x_2) E^+(x_2) E^+(x_1) \rangle}{\langle E^-(x_1) E^+(x_1) \rangle \langle E^-(x_2) E^+(x_2) \rangle}$$

$$= \frac{G^{(4)}(x_1, x_2, x_1, x_2)}{G^{(2)}(x_1, x_1) \cdot G^{(2)}(x_2, x_2)}$$

Beispiel für einzelne A. d. L.

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^+(0) a^+(\tau) a(\tau) a(0) \rangle}{\langle a^+(0) a(0) \rangle^2}$$

$$= \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 + \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}$$

a) Fock Zustände $|n\rangle$

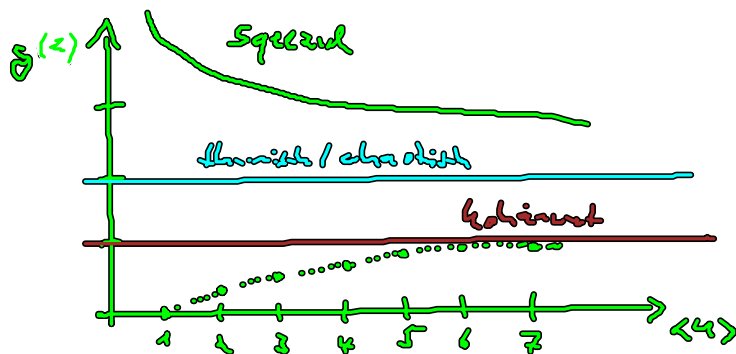
$$g^{(2)}(\tau) = \begin{cases} 0 & n=0,1 \\ \frac{n-1}{n} & n \geq 2 \end{cases}$$

b) kohärente Zustände

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle \rightarrow g^{(2)}(\tau) = 1$$

c) thermische Zustände

$$g^{(2)}(\tau) = 2 \quad (\text{Aus Regel})$$



Klassifizierung von Lichtfeldern

$$g^{(2)} = 1 \quad \text{Poissonian}$$

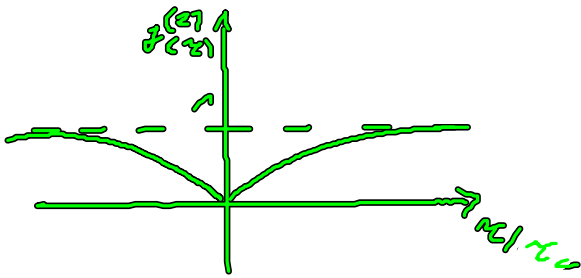
$$g^{(2)} > 1 \quad \text{Super-Poissonian}$$

$g^{(2)} < 1$ sub-Poissonian

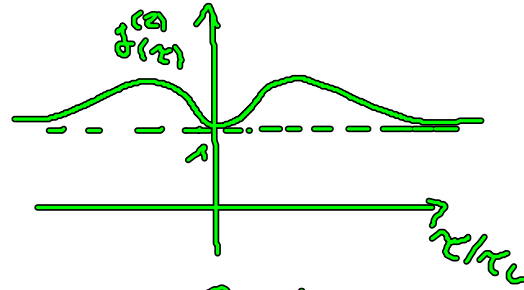
Photon Bunching / Anti-Bunching

$g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$: Photon Bunching

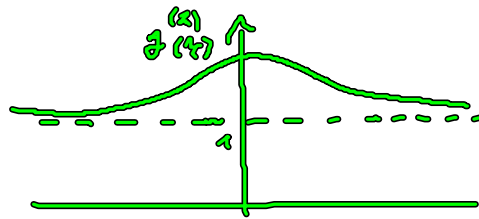
$g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$: Photon anti-bunching



sub-Poissonian
anti-bunched



super-Poissonian
anti-bunched



super-Poissonian
bunched 'light'

5 Quantenmechanische Beschreibung von Materie-Feld Wechselwirkung

5.1 Hamilton-Operat. für Materie-Feld Wechselwirkung

Ausblick:

1) Startpunkt ist Lagrangeform der Quantenelektrodynamik (QED)

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{\psi} \bar{\psi}(x) (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m c^2) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$$

$$D_\mu(x) = \partial_\mu + ie A_\mu(x) ; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

Lagrange

$$\underline{L} = \int d^3x \mathcal{L}(x)$$

2) Forderung der Eichung (z.B. Coulomb)

3) Übergang von Lagrange-Funktion zu Hamiltonian

4) QED Hamiltonian

$$H_{\text{atom}} = H_0 + H_{\text{EM}} + H_{\text{int}} \quad \text{Normalordering} \downarrow$$

$$H_0 = \sum_{\mathbf{r}} \int d^3r : \Psi_{\mathbf{r}}^\dagger(\mathbf{r}) (-i\hbar c \mu \nabla + m_e c^2) \Psi_{\mathbf{r}} :$$

$$H_{\text{EM}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r : (\mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + c^2 \mathbf{B}^2(\mathbf{r})) :$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{e}{\hbar} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \text{'Minimal coupling'}$$

- 5) Nicht-relativistischer Limit \rightarrow Pauli-Fierz Hamiltonian
- 6) Dipol-Näherung
- 7) Nichtrelativistischer Dipol-Hamiltonian

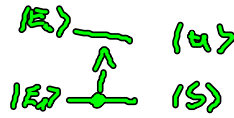
$$H_{\text{NR-D}} = H_A + H_{\text{EM}} + H_{\text{int}}$$

$$H_A = \sum_j E_j |E_j\rangle \langle E_j| \quad H_A |E_j\rangle = E_j |E_j\rangle$$

$$H_{\text{EM}} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2})$$

$$H_{\text{int}} = -e \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \quad \text{Dipolnäherung}$$

- 8) Limit von zwei abstrakten Niveaus
- 9) Drehwellennäherung
- 10) Winkelmomentphysik



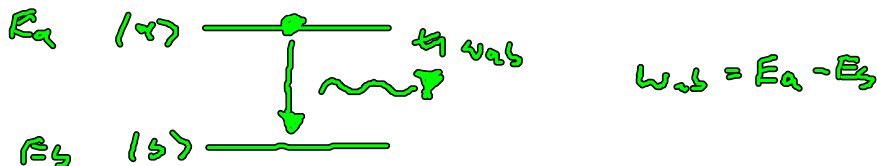
$$H_{\text{NR-D-RWA-I}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} g_{\mathbf{k}\lambda} \sigma_+ a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{A}})t} + \text{H.c.}$$

Hilf mir mit Schritt 1-10 in separaten Vorlesung

5.2 Wigner-Wick'sche Theorie zur spontanen Emission

Modell: Zwei-Niveaus System gekoppelt an ein Kontinuum von elektromagnetischen Feldmoden

Annahme: Atom ist initial in angeregtem Zustand, Feld im Vakuum



Ziel: Zeitentwicklung der Wellenfunktion, Langzeitverhalten für $t \rightarrow \infty$

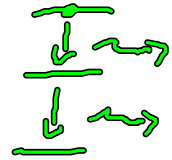
Hamilton-Operator in u -Bild

$$H_I = \hbar \sum_{\vec{k}, \lambda} g_{\vec{k}, \lambda} \sigma_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})t} + \text{h.c.}$$

Zeitabhängige Schrödinger Gleichung

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = H_I |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

Anfangsbedingung: $|\psi(t=0)\rangle = |a\rangle|0\rangle = |a, 0\rangle$



Ansatz für zeitabhängige Wellenfunktion

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\vec{k}, \lambda} c_{b, \vec{k}, \lambda}(t) |b, 1_{\vec{k}, \lambda}\rangle \quad (2)$$

Atom in angeregten Zustand
Feld im Vakuum

Atom im Grundzustand
ein Photon im Feld in Mode \vec{k}, λ

$$|0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\rangle \rightarrow$$

↑ Mode \vec{k}, λ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots\rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 1, 0, \dots\rangle$$

Ausgangspunkt der Anfangsbedingung

$$c_a(t=0) = 1, \quad c_{b, \vec{k}, \lambda}(t=0) = 0$$

Einsetzen von (2) in (1)

$$i\hbar \left\{ \dot{c}_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\vec{k}, \lambda} \dot{c}_{b, \vec{k}, \lambda}(t) |b, 1_{\vec{k}, \lambda}\rangle \right\}$$

$$= \hbar \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ g_{\vec{k}, \lambda} \sigma_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})t} + g_{\vec{k}, \lambda} \sigma_{\vec{k}, \lambda} e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})t} \right\}$$

$$\times \left\{ c_a(t) |a, 0\rangle + \sum_{\vec{k}', \lambda'} c_{b, \vec{k}', \lambda'}(t) |b, 1_{\vec{k}', \lambda'}\rangle \right\}$$

$$= \hbar \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ c_a(t) g_{\vec{k}, \lambda} e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})t} |b, 1_{\vec{k}, \lambda}\rangle + g_{\vec{k}, \lambda} c_{b, \vec{k}, \lambda}(t) e^{+i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})t} |a, 0\rangle \right\}$$

Projektion mit $\langle a, 0 |$

$$\rightarrow i\hbar \dot{c}_a(t) = \hbar \sum_{\vec{k}, \lambda} g_{\vec{k}, \lambda} e^{+i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})t} c_{b, \vec{k}, \lambda}(t) \quad (3)$$

Projektion mit $\langle b, 1_{\vec{k}, \lambda} |$

$$i\hbar \dot{c}_{b, \vec{k}, \lambda}(t) = \hbar g_{\vec{k}, \lambda} e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}})t} c_a(t) \quad (4)$$

Integration von (4)

$$\dot{c}_a(t) = -i g_{a\lambda} \int_0^t e^{-i(\omega_b - \omega_{a\lambda})(t-t')} c_a(t') dt' \quad (5)$$

Einsetzen in (3)

$$\dot{c}_a(t) = - \sum_{\lambda} |g_{a\lambda}|^2 \int_0^t c_a(t') e^{i(\omega_b - \omega_{a\lambda})(t-t')} dt' \quad (6)$$

Kontinuierlicher Limit für $\hbar \rightarrow 0$

$$\sum_{\lambda} \rightarrow 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} k^2 dk \quad \omega = ck$$

$$|g_{a\lambda}|^2 = \frac{\omega_{a\lambda}^2}{2\hbar\epsilon_0 V} \cos\theta | \langle a | \vec{r} | b \rangle |^2$$

\uparrow Dipolmoment
 \uparrow Dipolwinkel
 \uparrow Dipolorientierung

Einsetzen in (6)

$$\dot{c}_a(t) = - \frac{4 |\langle a | \vec{r} | b \rangle|^2}{(2\pi)^3 \hbar^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{\infty} \omega^3 d\omega \int_0^t c_a(t') e^{i(\omega_b - \omega)(t-t')} dt'$$

Markov-Limit

$$\int_0^t c_a(t') \dots dt' = c_a(t) \int_0^t \dots dt'$$

war Zustand zur abt. Zeit, nicht jedoch zu verg. Zeit
 hier spielt die Rolle

Laplace-Transform

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{i(\omega_b - \omega_{a\lambda})(t-t')} dt' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega_b - \omega_{a\lambda})t}{\omega_b - \omega_{a\lambda}} + \frac{1 - \cos(\omega_b - \omega_{a\lambda})t}{i(\omega_b - \omega_{a\lambda})}$$

$$= \pi \delta(\omega_b - \omega_a) - iP \frac{1}{\omega_b - \omega_a}$$

$$\dot{c}_a(t) = - \frac{4\pi \epsilon_0 |e|^2}{(2\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \left[\int_0^\infty \omega_{kk}^3 \delta(\omega_{ab} - \omega_{kk}) d\omega_{kk} - iP \int_0^\infty \frac{\omega_{kk}^3}{\omega_{ab} - \omega_{kk}} d\omega_{kk} \right] c_a(t)$$

Cauchy Hauptwert
"Principal value!"

Imaginärteil sorgt für
Frequenzshift = Lamb-Shift
Integral divergiert: QED Renormierung
führt zu unendlich Wert

$$\left(\text{ohne } \omega_{a-b}\text{-Shift} \right) = - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{4\pi \epsilon_0 |e|^2}{(2\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \omega_{ab}^3}_{=: A} \cdot c_a(t)$$

$$= - \frac{1}{2} A c_a(t)$$

$$A = \frac{4\pi \epsilon_0 |e|^2 \omega_{ab}^3}{3\pi \epsilon_0 c^3}$$

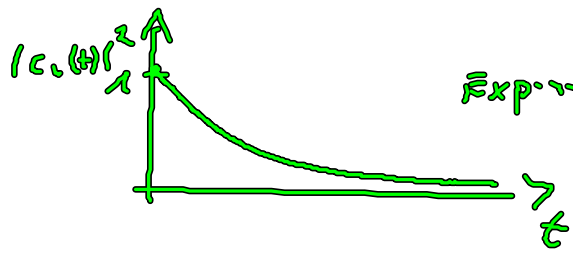
Einstein A Koeffizient
für spontane Emission

Lösung der Dgl

$$\dot{c}_a(t) = - \frac{1}{2} A c_a(t), \quad c_a(t) = e^{-\frac{A}{2} t}$$

Population des erwarteten Atoms

$$p_a(t) = |c_a(t)|^2 = e^{-At}$$



Exponentielle Zerfall der Pop-lation
mit Rate A

Lebensdauer $\tau = \frac{1}{A}$

Beispiel: Übergang $2P \rightarrow 1S$ von atomarem Wasserstoff

$$\Delta E = \frac{1}{4} \approx 1.6 \text{ eV}$$

Lebensdauer des erwarteten Zustands

$$\Delta t = c \cdot \Delta \tau \approx 48 \text{ cm} \quad \text{"Länge des Lichtpulses"}$$

