# Zusammenfassung Amplituden-Gleichung f. Lichtausbreitung

(paraxiale Näherung)

$$\left( \partial_z + f_L' \partial_t + \frac{\Delta_\perp}{2 i k_L} + \frac{i}{2} f_L'' \partial_t^2 \right) \tilde{E}(z, \vec{r}_\perp, t) = \frac{i k_L}{2 n_L^2} \frac{P_{res}(z, \vec{r}_\perp, t)}{\varepsilon_0}$$

$$f(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c}$$

$$f(\omega_L) \equiv f_L \equiv k_L$$

$$f'(\omega_L) = \partial_\omega \left( \frac{\omega n(\omega)}{c} \right) \Big|_{\omega = \omega_L} \equiv k_L'$$

die Transformation in mitbewegte Koordinaten

$$\zeta = z, \quad y = t - z f_L' = t - \frac{z}{v_g}, \quad \underline{\underline{f_L'^{-1}}} \equiv \underline{\underline{v_g}}$$

legt Interpretation als Gruppengeschwindigkeit nahe

(Bild unten)

$$n_L = n(\omega) \Big|_{\omega = \omega_L}$$

$$f_L'' = \frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\left(\frac{\omega k(\omega)}{c}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_L} \equiv k_L''$$

$k_L''$ wird Gruppengeschwindigkeitsdispersion genannt, und bestimmt die Dynamik eines Auseinanderlaufenden Pulses

<u>Amplitudengleichg. in mitbewegten Koordinaten</u>

$$\xi = z, \quad \eta = t - \frac{z}{v_g}, \quad f_L'' = k_L''$$

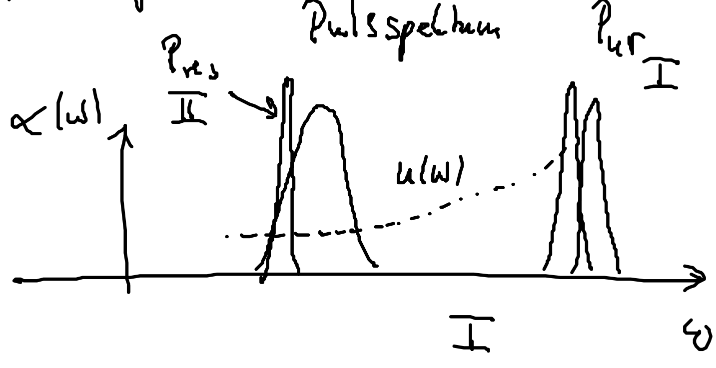
$$\left(\partial_\xi + \frac{\Delta_\perp}{2ik_L} + \frac{i}{2}k_L''\partial_\eta^2\right)\tilde{E}(\xi,\eta) = \frac{i}{2\varepsilon_0}\frac{k_L}{n_L^2}\underset{\text{II}}{\tilde{P}_{rs}(\xi,\eta)}$$

I

Ausbreitung eines Pulses in z-Richtg. mit Geschwindigkeit $v_g$

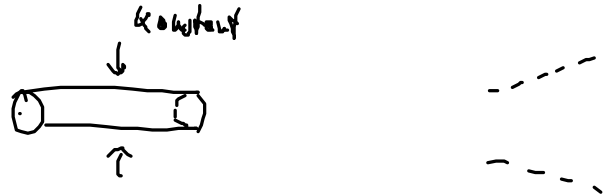
paraxiale Beugungseffekte

Korrekturen zur mittleren Gruppengeschw., „Dispersion der Gruppengeschwindigkeit" ($\lambda$-Abhängigkeit)



# VIII Lichtausbreitung in ausgedehnter Materie: lineare Optik

## 1. Strahlen ohne Beugung

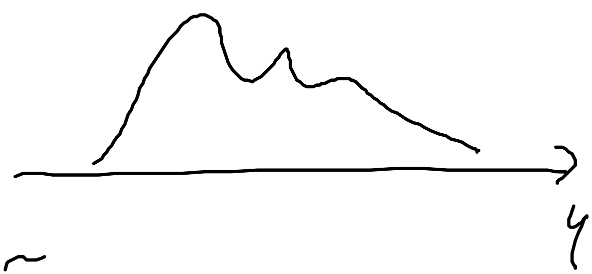



### 1.1. Gruppengeschwindigkeit / Dispersion

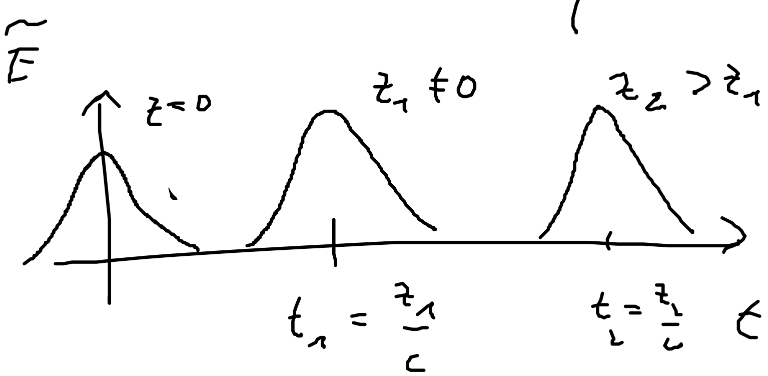
#### a) Gruppengeschwindigkeit (ohne Distortion)

$$\partial_\xi \tilde{E}(\xi, \eta) = 0$$

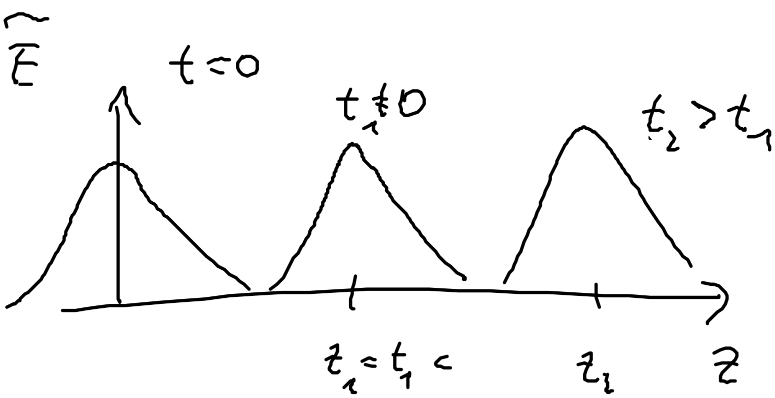
jede Funktion mit $\tilde{E} = \tilde{E}(\eta)$ ist Lösung




$$\tilde{E}\left(t - \frac{z}{v_g}\right)$$

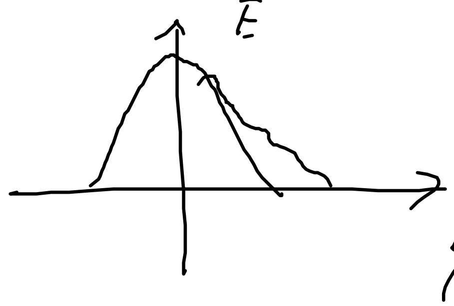



über Zeit




über Ort

später



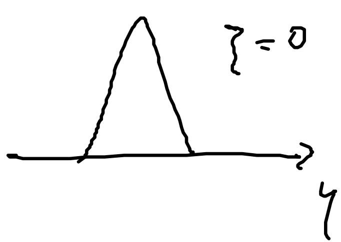

Sinnvoll Korrekturen im y-Plot anzustellen

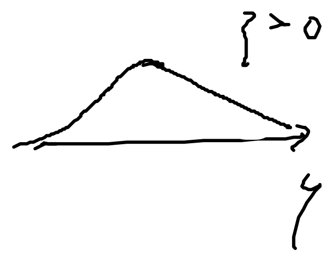
enthält „nichttriviale" Ausbreitungseffekte

## b) Gruppengeschwindigkeitsdispersion (Blatt 8)

$$\left(\partial_\xi + \frac{i}{2} k_2'' \partial_y^2\right) \tilde{E}(\xi, y) = 0$$

analog Schrödingergleichung: $\partial_y^2 \to \partial_x^2$, $\partial_\xi \to \partial_t$




gute Annahme bei $\xi = 0$ einen Gaußschen Puls zu nehmen, da diese v. Laser zur Verfügung gestellt werden.

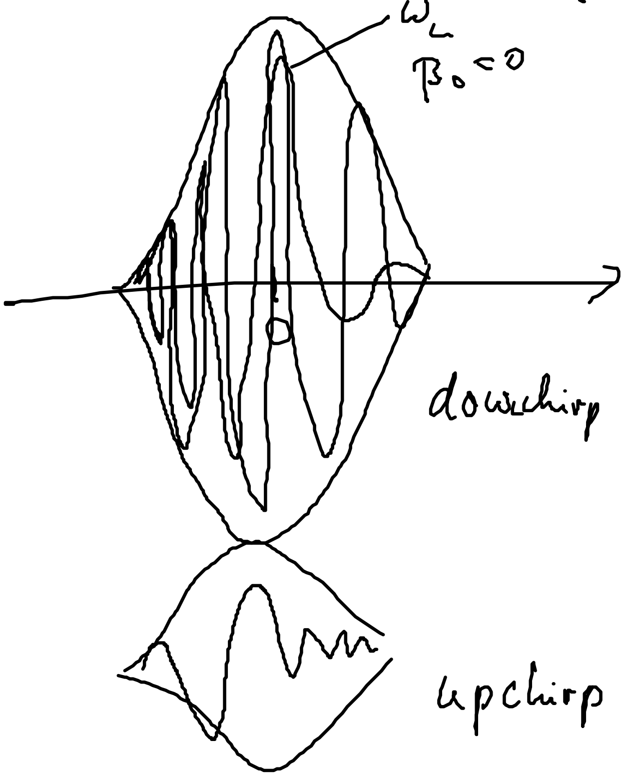
$$\tilde{E}(\xi = 0, y) = \frac{A_0}{2} e^{-\gamma_0 y^2} e^{i\varphi(y)}$$

Amplitude  Gauß  Phasenmodulation „chirp" einfachster Ansatz $\varphi = \beta_0 y^2$

Gesamtpuls $E = \tilde{E}\, e^{-i\omega_L y}$

momentane Frequenz: $\frac{\partial}{\partial y}(\omega_L y) = \omega_L$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega_L y - \varphi(y)\right) = \omega_L - 2\beta_0 y$$

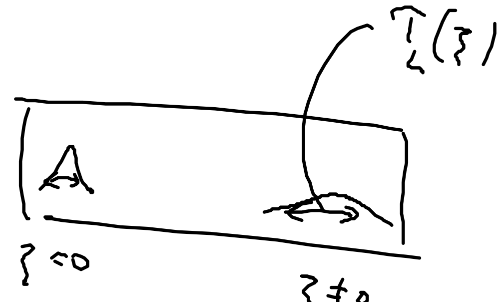



zu jedem Zeitpunkt eine andere Frequenz!

downchirp $\beta_0 > 0$

upchirp $\beta_0 < 0$

Bemerkungen zu Auswirkungen:




a) Pulse bleibt gaußförmig,

aber Pulsdauer:

$$T_L(\xi) = T_L(\xi=0)\cdot\left[1 + 2\beta_0 k_L'' L_D \left(1-\left[1-\frac{\xi}{L_D}\right]^2\right)\right]^{1/2}$$

$$L_D = -\frac{\beta_0}{2k_L''} \Big/ \left(\beta_0^2 + \gamma_0^2\right) \quad \text{Dispersionslänge}$$

b) kleine $\xi$: $T_L(\xi) = T_L(0)\,(1 + 2\beta_0 k_L''\xi)$

$$\uparrow$$

$$\beta_0 \lessgtr 0$$

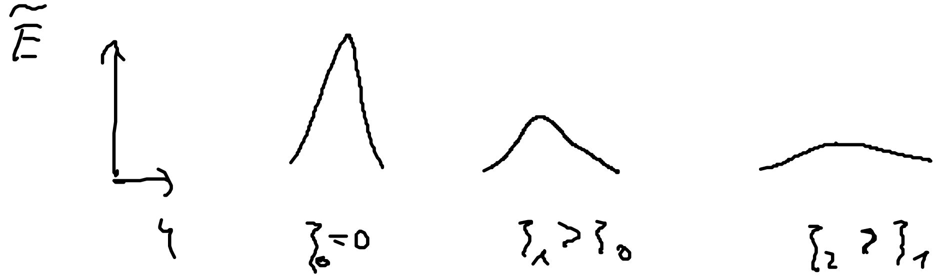
$$k_L'' \gtrless 0$$

$\beta_0 \cdot k_L'' > 0 \longrightarrow T_L$ verlängert

$\beta_0 \cdot k_L'' < 0 \longrightarrow T_L$ verkürzt

c) große $\xi$: $T_L(\xi) \sim T_L(0)\cdot\xi \rightarrow T_L$ verlängert

d) insgesamt: $\underline{k_L''\cdot\beta_0 > 0}$

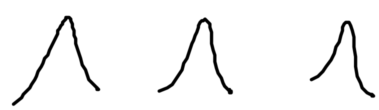


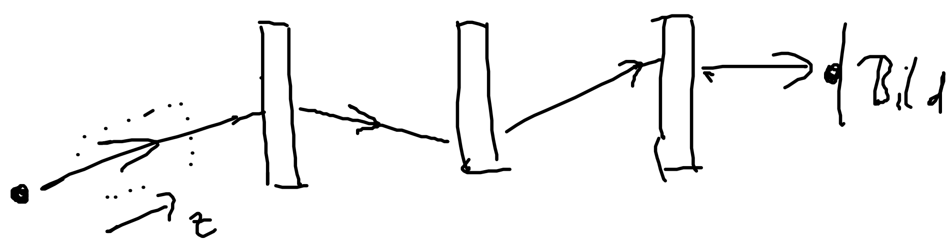
$k_L'' \cdot \beta_0 < 0$


## 1.2. Paraxialer Strahlengang

ABCD - Transformmatrizen

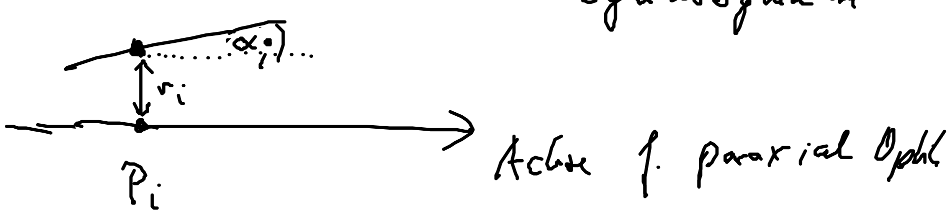
$$\frac{\partial}{\partial \xi} E(\xi, t) = 0$$






$\xi = z$ Achse wird i.a. durch optische Elemente verkippt

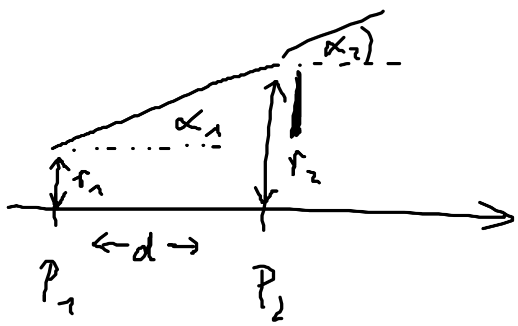
Zylindersymmetrie




$\vec{S}_i = (r_i, \alpha_i)$ , Abstand z. Achse

Winkel z. Achse

a/ Ausbreitg. in freie Raum zwisch 2 Punkte




$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad (*)$$

$$r_2 = r_1 + \underline{tg\alpha_1 \cdot d}$$

$$\approx r_1 + \alpha_1 d$$

paraxiale Optik

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + d\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} (*)$$

$$\vec{S}_2 = \hat{T}_{FR} \vec{S}_1$$

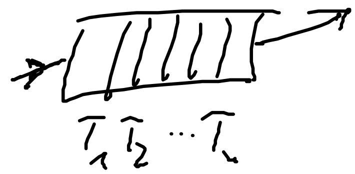
freie Raum

Transfermatrix f. freie Raum ist

$$\hat{T}_{FR} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verallgemeinert i. alle optischen Elemente werden und $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ - Matrizen ausgedrückt

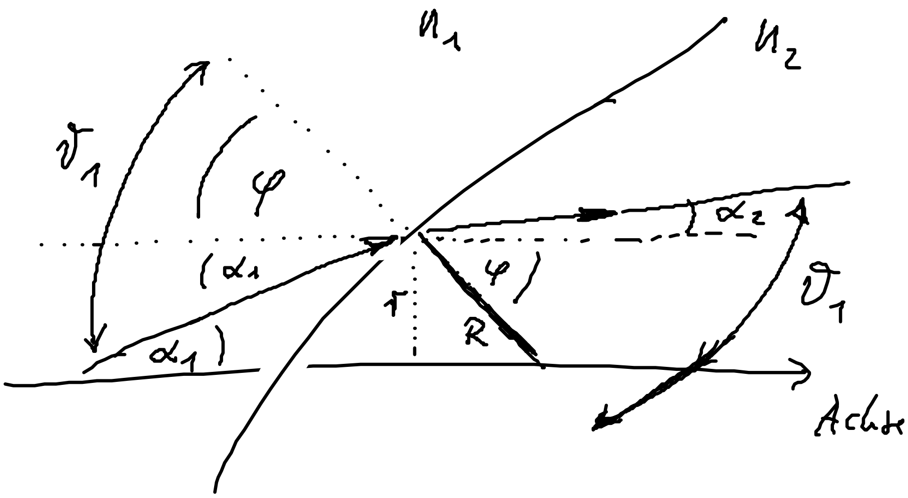
- alle Strahlgänge




werden d. Matrixmultiplikation berechnet

- verallgemeinbar auf Gaußstrahlen $(w_0, z_0)$

## b/ brechende Oberfläche




R - Krümmungsradius

$\alpha_1 \neq \alpha_2$

$r_1 = r_2$

Brechungsgesetz: $\sin\vartheta_1\, n_1 = \sin\vartheta_2\, n_2$

paraxial: $\vartheta_1\, n_2 = \vartheta_2\, n_2 \quad (*)$

über Sinus

$$\vartheta_1 = \varphi + \alpha_1 \approx \alpha_1 + \frac{r_1}{R}$$

$$\vartheta_2 = \varphi + \alpha_2 \approx \alpha_2 + \frac{r_1}{R}$$

$\vartheta_1\, \vartheta_2$ in $(*)$ einsetzen und nach $\alpha_2$ umstellen

$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\alpha_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{r_1}{R}$$

$$r_2 = r_1$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}}_{\hat{T}_{BO}} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

(brechende Oberfläche)

plane Oberfläche $R \to \infty$

$$\hat{T}_{PO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

c/ Linse


$$\hat{T}_{Linse} = \hat{T}_{BO_1}\,\hat{T}_{FR}\,T_{BO_2}$$

dünne Linse $\frac{d}{R_1}, \frac{d}{R_2} \to 0$

$$f^{-1} = -(n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$f$ - Brennweite $\quad n_1 = 1$, $n_2 = n$, $n_3 = 1$

## 2. Wechselwirkung mit einer resonanten Dipoldichte

$$\partial_z \tilde{E} = \frac{i k_L}{2 n_L^2} \frac{\tilde{P}_{res}}{\varepsilon_0}$$

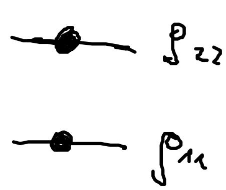
$\tilde{P}_{res}$ : Zweiniveausystem in linearer Optik

$$\tilde{P}_{res} = \underbrace{d_{12}}_{\text{Dipolmoment}} \underbrace{\tilde{\rho}_{12}}_{\text{Dichtematrix}} \underbrace{n_0}_{\text{Teilchendichte}}$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{12} = i \underbrace{\tilde{\Omega}_{21}}_{\text{Rabifrequenz}} \underbrace{\Delta}_{\text{Inversion}} - \gamma \tilde{\rho}_{12}$$

(exakte Resonanz $\omega_L = \omega_{21}$)

$\Delta(t) \equiv \Delta_0$ ist unveränderlich in linearer Optik = konstant



Frequenzraum: $\qquad \tilde\Omega_{21} \equiv \tilde\Omega$

$$\partial_\zeta \tilde E = \frac{i k_L}{2 n_L^2 \varepsilon_0} n_0 d_{12} \tilde\rho_{12} \qquad (\tilde\rho_{12}(\Delta\omega))$$

$$-i\Delta\omega\, \tilde\rho_{12} = -\gamma \tilde\rho_{12} + i \tilde\Omega \Delta_0 \qquad (\tilde\Omega(\Delta\omega))$$

$(\omega - \omega_L)$

$$\tilde\rho_{12} = \frac{i\tilde\Omega\Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega}$$

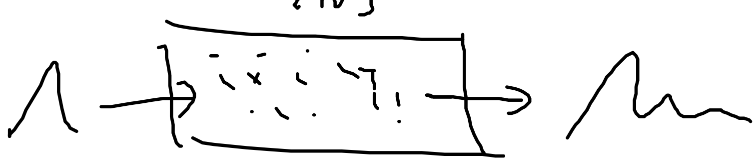
einsetzen in Wellengleichung f. $\tilde E \to \tilde\Omega = \frac{d_{21}\tilde E}{\hbar}$

$$\partial_\zeta \tilde\Omega = i\alpha\tilde\rho_{12}, \quad \alpha = \frac{k_L n_0 |d_{12}|^2}{2 n_L^2 \hbar \varepsilon_0}$$

$$\partial_\zeta \tilde\Omega = -\frac{\alpha\tilde\Omega\Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega}$$

$$\boxed{\tilde\Omega(\zeta,\Delta\omega) = e^{-\frac{\alpha\Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega}\zeta}\,\tilde\Omega(\zeta=0,\Delta\omega)}$$

ZNS

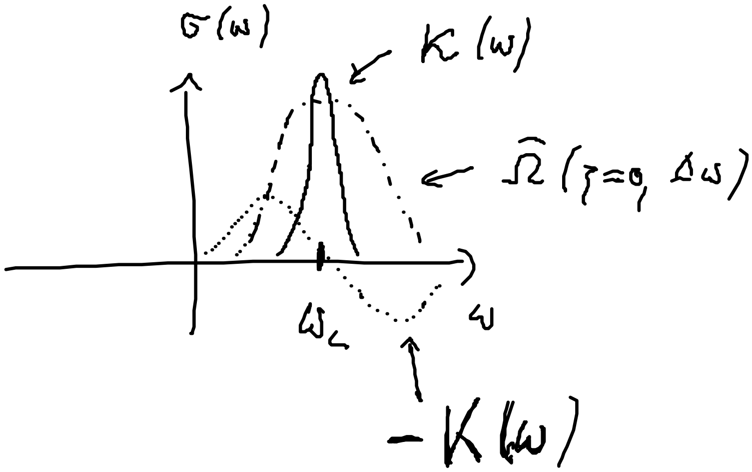


Lösung der Ausbreitung d. Ensemble v. ZNS ist: $\qquad$ Streuquerschnitt

$$\tilde\Omega(\zeta,\Delta\omega) = \Omega(\zeta=0,\Delta\omega)\, e^{-\frac{\sigma(\omega)}{2}\zeta}$$

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{2\alpha\Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega} = 2\alpha\Delta_0 \frac{\gamma + i\Delta\omega}{\gamma^2 + \Delta\omega^2} = K(\omega) + i\,\bar{K}(\omega)$$

Absorption Brechzahl




Bemerkungen:

a) $K(\omega) = \dfrac{2\alpha\Delta_0\gamma}{\gamma^2 + \Delta\omega^2}$

ist eine Meßgröße Absorptionslänge

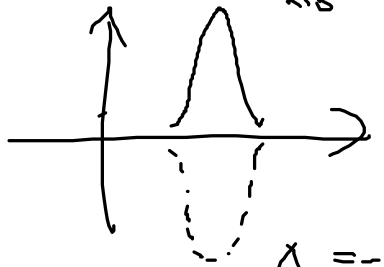
messen

$$\underline{\underline{K(\omega)}} = -\frac{1}{z} \ln \frac{|\tilde{\Omega}(z, \Delta\omega)|^2}{|\tilde{\Omega}(z=0, \Delta\omega)|^2}$$

materialspezifisch

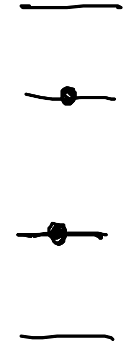
messen

b) $K(\omega)$

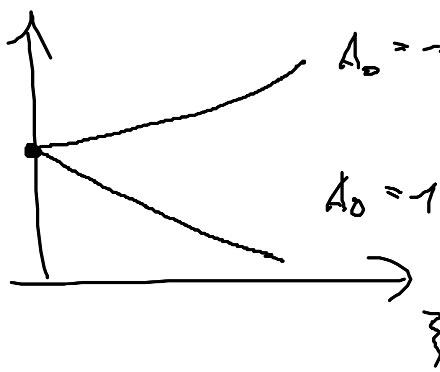


$\Delta_0 = 1 \quad \rho_{11} = 1, \ \rho_{22} = 0$

$\Delta_0 = -1 \quad \rho_{11} = 0, \ \rho_{22} = 1$



$\tilde{\Omega}(\xi, \Delta\omega)$ „fest"




$\Delta_0 = -1$ Verstärkung

$\Delta_0 = 1$ Absorption

Lambert-Beer f.

Transparenz