5.3 Jaynes Cummings Modell

Jaynes-Cummings (JC) Modell

- Zwei-Niveau System plus einzelne quantisierte Feldmode
- einfachste Modelle für Feld Materie Wechselwirkung
- exakt lösbar

Ausgangspunkt Atom-Feld Hamiltonian in Dipol Näherung

$$H = \underbrace{\sum_{\underline{k}} \hbar \omega_k a^\dagger_{\underline{k}} a_{\underline{k}}}_{\text{Feld}} + \underbrace{\sum_j E_j |E_j\rangle\langle E_j|}_{\text{Atom}} + \underbrace{\hbar \sum_{ij} \sum_{\underline{k}} g^{ij}_{\underline{k}} |E_i\rangle\langle E_j| (a_k + a^\dagger_k)}_{\text{Dipol Kopplung } \text{"}-e\underline{r}\cdot\underline{E}\text{"}}$$

$$g^{ij}_{\underline{k}} = -\frac{e}{\hbar} Q_k \varepsilon_{\underline{k}} \cdot \langle E_i | \underline{r} | E_j \rangle \qquad Q_k = \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Atom reduziert auf zwei Niveaus $|E_1\rangle, |E_2\rangle$

$$\rightsquigarrow \quad g_k = g^{12}_{\underline{k}} = g^{21}_{\underline{k}}$$

$$\sigma_3 = |E_1\rangle\langle E_1| - |E_2\rangle\langle E_2| \quad , \quad 1\!\!1 = |E_1\rangle\langle E_1| + |E_2\rangle\langle E_2|$$

$$\sigma_+ = -i |E_1\rangle\langle E_2| \quad , \quad [\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_3$$

$$\sigma_- = i |E_2\rangle\langle E_1| \quad , \quad [\sigma_-, \sigma_3] = 2\sigma_-$$

$$E_1 |E_1\rangle\langle E_1| + E_2 |E_2\rangle\langle E_2| = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sigma_3 + \underbrace{\frac{1}{2}(E_1 + E_2)}_{\text{konstanter Term kann ignoriert werden}}$$

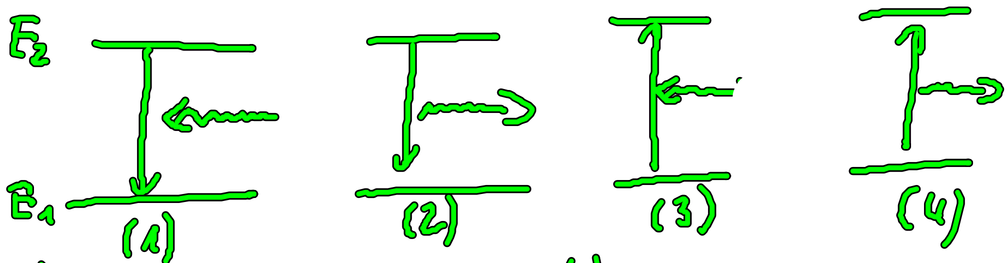
$$\omega_0 = \frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1),$$

Hamiltonoperator für zwei Niveau System plus Feld

$$H = \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_k a^\dagger_{\underline{k}} a_{\underline{k}} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \sigma_3 + \sum_{\underline{k}} i g_k (\sigma_- - \sigma_+)(a_k + a^\dagger_k)$$

Kopplungsterme

$$(\sigma_- - \sigma_+)(a_k + a_k^\dagger) = \underbrace{\sigma_- a_k} + \underbrace{\sigma_- a_k^\dagger} - \underbrace{\sigma_+ a_k} - \underbrace{\sigma_+ a_k^\dagger}$$



Prozesse (2), (3) sind energieerhaltend, während bei den Einzelprozessen in (1) und (4) die Energie nicht erhalten wird. Vernachlässigen der Terme (1), (4) entspricht Drehwellennäherung (Rotating wave approximation).

Für den Fall einer einzelnen Mode resultiert

$$\boxed{H_{JC} = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 + i\hbar g(a^\dagger\sigma_- - \sigma_+ a)}$$

Jaynes Cummings Hamiltonian

(g kann reell gewählt durch geschickte Wahl der Basis)

$$= H_F + H_A + H_I$$

Anregungsoperator

$$N = a^\dagger a + \frac{1}{2}(\sigma_3 + I)$$

kommutiert mit dem JC-Hamiltonian

$$[H_{JC}, N]_- = 0 \rightsquigarrow$$ Summe der Anregungen eine Erhaltungsgröße ist.

Beweis:

$$[H_I, a^\dagger a] = i\hbar g\big(\underbrace{[a^\dagger\sigma_-, a^\dagger a]}_{\sigma_- a^\dagger \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1}} - \underbrace{[\sigma_+ a, a^\dagger a]}_{\sigma_+ \underbrace{[a, a^\dagger]}_{+1} a}\big)$$

$$= -i\hbar g(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a)$$

$$\frac{1}{2}[H_I, \sigma_3]_- = \frac{i\hbar g}{2}\left(a^\dagger[\sigma_-, \sigma_3] - [\sigma_+, \sigma_3]a\right)$$

$2\sigma_-$ $\quad$ $-2\sigma_+$

$= + i\hbar g(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a)$

Mit N lässt sich der JC-Hamiltonian schreiben als

$$H_{JC} = \underbrace{\hbar\omega\left(N - \tfrac{1}{2}I\right)}_{\text{Term trägt nicht zur Dynamik bei, sondern führt nur zu einer Phase}} - \hbar\frac{\Delta}{2}\sigma_3 + i\hbar g(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger)$$

Detuning $\Delta = \omega - \omega_0$

ω: Modenfrequenz

ω_0: atomare Resonanzfrequenz

Eliminierung der Phase

$$|\psi\rangle \to |\tilde{\psi}\rangle = U|\psi\rangle, \quad U^{-1} = U^\dagger \Leftrightarrow \langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$H_{JC} \to \tilde{H}_{JC} = U H_{JC} U^\dagger - i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger$$

Wahl der unitären Transformation

$$U = \exp\left(i\left(N - \tfrac{1}{2}I\right)\omega t\right)$$

(weglassen von ~)

$$\rightsquigarrow \quad \| \quad H_{JC} = -\hbar\frac{\Delta}{2}\sigma_3 + i\hbar g(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger)$$

Dressed States

$$H_{JC}|E_1, n+1\rangle = \frac{\hbar\Delta}{2}|E_1, n+1\rangle + i\hbar g\sqrt{n+1}\,|E_2, n\rangle$$

$$H_{JC}|E_2, n\rangle = -\frac{\hbar\Delta}{2}|E_2, n\rangle - i\hbar g\sqrt{n+1}\,|E_1, n+1\rangle$$

$\Rightarrow$ Die entarteten Eigenzustände von N bilden einen geschlossenen Untervektorraum.

Abkürzung

$$|\phi_{1,n}\rangle = |E_1\rangle|n+1\rangle \qquad |\phi_{2n}\rangle = |E_2\rangle|n\rangle$$

Identität

$$I = |E_1\rangle|0\rangle\langle 0|\langle E_1| + \sum_{n=0}^{\infty}\left(|\phi_{1n}\rangle\langle\phi_{1n}| + |\phi_{2n}\rangle\langle\phi_{2n}|\right)$$

Matrixelemente

$n \neq n'$ $\langle \phi_{in} | H_{JC} | \phi_{jn'} \rangle = 0$, außer $n = n'$

$n = n'$ $\langle \phi_{in} | H_{JC} | \phi_{jn'} \rangle \rightarrow \hbar \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2} & ig\sqrt{n+1} \\ -ig\sqrt{n+1} & -\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} = H_{2\times2}$

Eigenwerte der 2x2 Blöcke

- $\mathrm{Tr}\, H_{2\times2} = 0$
- $\mathrm{Det}\, H_{2\times2} = -\frac{\hbar^2}{4}\left(\Delta^2 + 4g^2(n+1)\right)$

$$\pm \frac{\hbar}{2} \Omega_n = \left(\frac{\mathrm{Tr}\, H_{2\times2}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Tr}\, H_{2\times2}}{2}\right)^2 - \mathrm{Det}\, H_{2\times2}}$$

$$\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}$$ n-Photonen Rabi-Frequenz

Eigenvektoren

$$|n, \pm\rangle = \frac{1}{N_\pm}\left[-2ig\sqrt{n+1}\, |\phi_{1n}\rangle + (\Delta \pm \Omega_n)\, |\phi_{2n}\rangle\right]$$

"Dressed states"

Normierung

$$N_\pm = \left(4g^2(n+1) + \Delta^2 \pm 2\Delta\Omega_n + \Omega_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{2\Omega_n(\Omega_n \pm \Delta)}$$

$$|\psi(t)\rangle = c_{1,0}\, e^{-i\Delta\frac{t}{2}} |\phi_{1,0}\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n |n,+\rangle e^{-i\Omega_n\frac{t}{2}} + d_n |n,-\rangle e^{+i\Omega_n\frac{t}{2}}\right)$$

Die Konstanten $c_{1,0}, b_n, d_n$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung. $|\psi(t=0)\rangle$

Beispiel für JC-Zeitentwicklung

Exakte Resonanz $\Delta = 0 \rightsquigarrow \Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$

Feld im Fock-Zustand $|n\rangle$, Atom im angeregten Zustand $|E_2\rangle$

$$|\psi(t=0)\rangle = |E_2\rangle |n\rangle = |\phi_{2n}\rangle$$

$$|n,\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-i|\phi_{1n}\rangle \pm |\phi_{2n}\rangle\right]$$

$$|\phi_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|n,+\rangle - |n,-\rangle\right]$$

wobei $b_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $d_n = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|n+\rangle e^{-i\Omega_n t/2} - |n-\rangle e^{i\Omega_n t/2}\right]$$

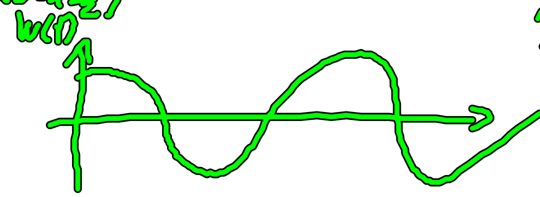
$$= |\phi_{2n}\rangle \cos(\Omega_n t/2) - |\phi_{1n}\rangle \sin(\Omega_n t/2)$$

Atomare Inversion

$$W(t) = \langle\psi(t)|\sigma_3|\psi(t)\rangle \qquad \begin{cases} +1 & \text{für } |E_2\rangle \\ -1 & \text{für } |E_1\rangle \end{cases}$$

$$= \cos^2(\Omega_n t/2) - \sin^2(\Omega_n t/2)$$

$$\| \; w(t) = \cos(\Omega_n t) \; \|$$



Rabi Oszillation

Falls $n=0$, $\Omega_n = 2g$, spontaner Zerfall

Quanten-Revivals

Anfangszustand: Atom in $|E_2\rangle$, Feld in allgemeinem Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = |E_2\rangle \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \qquad b_n = -d_n = \frac{1}{\sqrt{2}} c_n$$

Zeitentwicklung

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2}}\left(|n,+\rangle e^{-i\Omega_n t/2} - |n,-\rangle e^{i\Omega_n t/2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(|\phi_{2n}\rangle \cos(\Omega_n t/2) - |\phi_{1n}\rangle \sin(\Omega_n t/2)\right)$$

Inversion

$$\| \; w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \cos(\Omega_n t) \; \|$$

Beispiel: kohärenter Zustand

$$|c_n|^2 = e^{-\bar n}\frac{(\bar n)^n}{n!}$$

$$W(t) = e^{-\bar n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\bar n)^n}{n!}\cos(2g\sqrt{n+1}\,t)$$

$\bar n \sim 10^{-5}$ Rabi Oszillation mit Periode $2gt$

$\bar n \sim 10^{-1}$ inkohärentes Verhalten

$\bar n \sim 10$ Revivals

Taylor Entwicklung

$$n = \bar n + \delta n$$

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{\bar n+\delta n+1} = \sqrt{\bar n+1}\sqrt{1+\frac{\delta n}{\bar n+1}} \approx \sqrt{\bar n+1}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta n}{\bar n+1}\right)$$

$$= \sqrt{\bar n+1} + \frac{n-\bar n}{2\sqrt{\bar n+1}} = \frac{2\bar n+2-\bar n+n}{2\sqrt{\bar n+1}} = \frac{\bar n+2}{2\sqrt{\bar n+1}} + \frac{n}{2\sqrt{\bar n+1}}$$

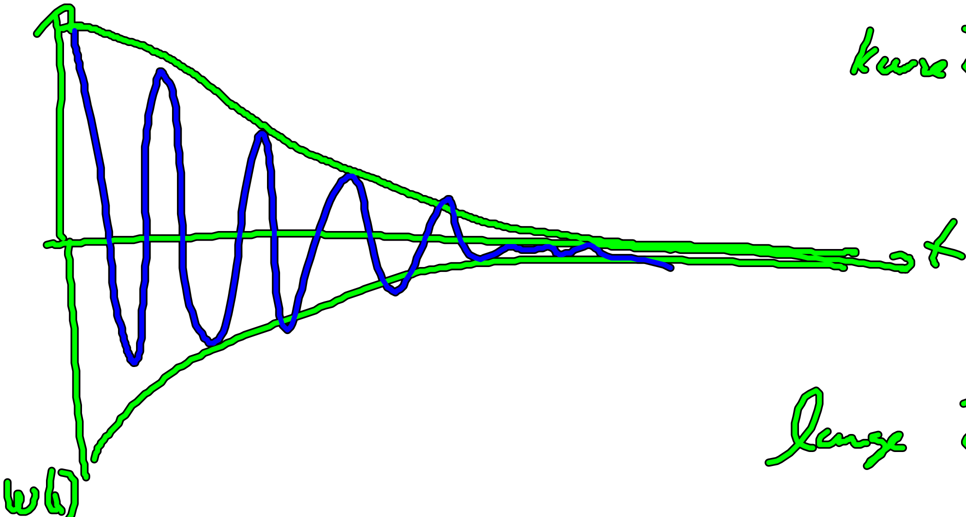
$$W(t) = e^{-\bar n}\,\mathrm{Re}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\bar n)^n}{n!}\,e^{2igt\left(\frac{\bar n+2}{2\sqrt{\bar n+1}}+\frac{n}{2\sqrt{\bar n+1}}\right)}\right]$$

$$= e^{-\bar n}\,\mathrm{Re}\left[\exp\left[2igt\frac{\bar n+2}{2\sqrt{\bar n+1}} + \bar n\exp\left(\frac{2igt}{2\sqrt{\bar n+1}}\right)\right]\right]$$

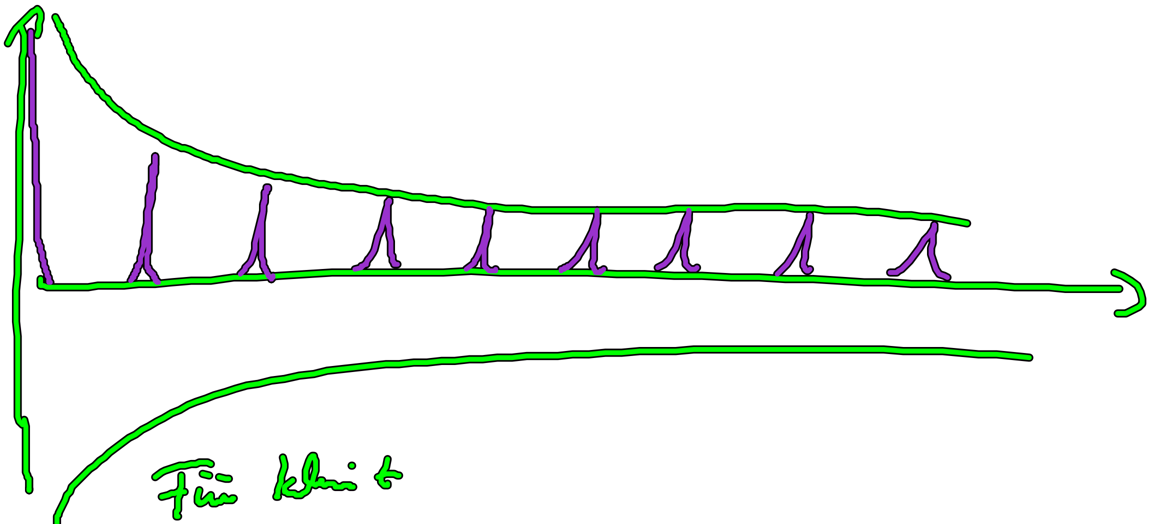
$$W(t) = \exp\left(\bar n\left\{\cos\left(\frac{gt}{\sqrt{\bar n+1}}\right)-1\right\}\right) \qquad \cos\left[\frac{\bar n+2}{\sqrt{\bar n+1}}gt+\bar n\sin\frac{gt}{\sqrt{\bar n+1}}\right]$$

w(t)

kurze Zeiten



lange Zeiten



Für kleine t

$$\cos\frac{gt}{\sqrt{\bar n+1}} - 1 \approx -\frac{g^2 t^2}{2(\bar n+1)}$$ Gaußförmige Dephasierung.

$\rightsquigarrow$ Dämpfung der kohärenten Rabi Oszillationen mit Gauss Profil und charakteristischer Zeitskala

$$\tau_{kollaps} = \frac{\sqrt{\bar n+1}}{g} = \frac{2(\bar n+1)}{\Omega_n}$$

Für grosse t

Revivals der kohärenten Oszillationen mit Zeitskala

$$\tau_{Revival} = \frac{\sqrt{\bar n}}{g} 2\pi = \frac{2\sqrt{\bar n+1}\sqrt{\bar n}}{\Omega_n} 2\pi$$

c.f. Phys. Rev A 23, 236 (1981)