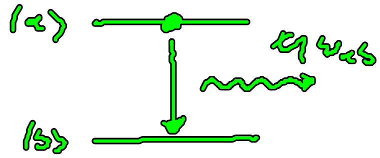
5.2 Wigner-Weisskopf Theorie zur spontanen Emission

Modell: Zwei-Niveau System gekoppelt an ein Kontinuum von elektromagnetischen Feldmoden

Annahme: Atom ist initial in angeregtem Zustand, Feld im Vakuum



$$\omega_{ab} = E_a - E_b$$

Ziel: Zeitentwicklung der Wellenfunktion, Langzeitverhalten für $t \to \infty$

Hamilton-operator im WW-Bild

$$H_I = \hbar \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}\, \sigma_+ a_{k\lambda}\, e^{i(\omega_{ab}-\omega_k)t} + H.c.$$

Zeitabhängige Schrödinger-gleichung

$$i\hbar\, \partial_t |\psi(t)\rangle = H_I |\psi(t)\rangle$$

Anfangsbedingung $|\psi(t=0)\rangle = |a\rangle|0\rangle = |a;0\rangle$

Ansatz für zeitabhängige Wellenfunktion

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{c_a(t)\,|a,0\rangle}_{\text{Atom im angeregten Zustand, Feld im Vakuum}} + \underbrace{\sum_{k\lambda} c_{b,k\lambda}(t)\,|b,1_{k\lambda}\rangle}_{\text{Atom im Grundzustand, ein Photon im Feld}}$$

Aufgrund der Anfangsbedingung

$$c_a(t=0) = 1 \qquad c_{b,k\lambda}(t=0) = 0$$

Einsetzen von (2) in (1)

$$i\hbar \left\{ \dot{c}_a(t)\,|a,0\rangle + \sum_{k\lambda} \dot{c}_{b,k\lambda}(t)\,|b,1_{k\lambda}\rangle \right\}$$

$$= \hbar \sum_{\vec k\lambda} \left\{ g^*_{\vec k\lambda}\, \sigma_+\, a_{\vec k\lambda}\, e^{i(\omega_{ab}-\omega_{\vec k})t} + g_{\vec k\lambda}\, \sigma_-\, a^+_{\vec k\lambda}\, e^{-i(\omega_{ab}-\omega_{\vec k})t} \right\}$$

$$\times \left\{ c_a(t)\, |a;0\rangle + \sum_{k\lambda} c_{b,\vec k\lambda}(t)\, |b, 1_{\vec k\lambda}\rangle \right\}$$

$$= \hbar \sum_{\vec k\lambda} \left\{ c_a(t)\, g_{\vec k\lambda}\, e^{-i(\omega_{ab}-\omega_{\vec k})t}\, |b, 1_{\vec k\lambda}\rangle + g^*_{\vec k\lambda}\, c_{b\vec k\lambda}(t)\, e^{+i(\omega_{ab}-\omega_{\vec k})t}\, |a,0\rangle \right\}$$

Projektion mit $\langle a,0|$

$$\rightsquigarrow \quad i\hbar\, \dot c_a(t) = \hbar \sum_{\vec k\lambda} g^*_{k\lambda}\, e^{+i(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})t}\, c_{b,\vec k\lambda}(t) \qquad (3)$$

Projektion mit $\langle b, 1_{k\lambda}|$

$$i\hbar\, \dot c_{b,\vec k\lambda}(t) = \hbar\, g_{\vec k\lambda}\, e^{-i(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})t}\, c_a(t) \qquad (4)$$

Integration von (4)

$$c_{b,\vec k\lambda}(t) = -i\, g_{\vec k\lambda} \int_0^t e^{-i(\omega_{ab}-\omega_{\vec k\lambda})t'}\, c_a(t')\, dt'$$

Einsetzen in (3)

$$\dot c_a(t) = -\sum_{k\lambda} |g_{k\lambda}|^2 \int_0^t c_a(t')\, e^{i(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})(t-t')}\, dt'$$

Kontinuum Limit für k-Summe

"unendliche" Energie → später: cutoff

$$\sum_{k\lambda} \to 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} k^2\, dk$$

$$|g_{\vec k\lambda}|^2 = \frac{\omega_{\vec k\lambda}}{2\hbar\varepsilon_0 V} \cos\theta\, |\langle a|\vec r|b\rangle|^2$$

Dipolmatrixelemente

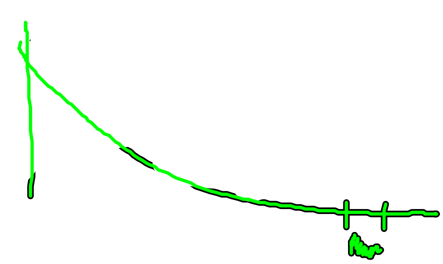
Einsetzen

$$\dot c_a(t) = -\frac{4|\langle a|\vec r|b\rangle|^2}{(2\pi)^2\, 6\hbar\, \varepsilon_0\, c^3} \int_0^{\infty} \omega_k^3\, dk \int_0^t c_a(t')\, e^{i(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})(t-t')}\, dt'$$

Markov-Limit

$$\int_0^t c_a(t') \ldots\ldots dt' = c_a(t) \int_0^t \ldots\ldots dt'$$

$\approx c_a(t)$ für langsam veränderliches $c_a(t')$



Langzeitlimes

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{i(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})(t-t')}\,dt' = \lim_{t\to\infty}\frac{\sin(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})t}{\omega_{ab}-\omega_{k\lambda}} + \frac{1-\cos(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})t}{i(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})}$$

$$= \pi\,\delta(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda}) - i\,\mathcal{P}\,\frac{1}{\omega_{ab}-\omega_{k\lambda}}$$

Cauchy Hauptwert
"Principal value"

$$\dot c_a(t) = -\frac{4\,|\langle a|\vec r|b\rangle|^2}{(2\pi)^2\, 6\hbar\varepsilon_0 c^3}\Big[\int_0^\infty \omega_k^3\,\pi\,\delta(\omega_{ab}-\omega_k)\,d\omega_k \underbrace{- i\,\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{\omega_k}{\omega_{ab}-\omega_k}\,d\omega_k}_{}\Big]\cdot c_a(t)$$

Imaginärteil sorgt für
Frequenzshift = Lamb-Shift
Integral divergiert; QED Renormierung
führt zu endlichem Wert ≙ cutoff $\int_0^{mc^2}$

ohne Lamb Shift

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{|\langle a|\vec r|b\rangle|^2}{3\pi\hbar\varepsilon_0 c^3}\,\omega_{ab}^3\cdot c_a(t)$$

$$= -\frac{1}{2}A\,c_a(t)$$

$$\boxed{A = \frac{|\langle a|\vec r|b\rangle|^2\,\omega_{ab}^3}{3\pi\hbar\varepsilon_0 c^3}}$$

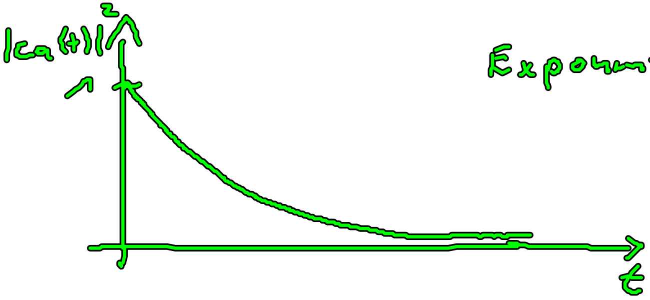
Einstein A Koeffizient für spontane Emission

Lösung der DGL

$$\dot c_a(t) = -\frac{1}{2}A\,c_a(t)\quad;\quad c_a(t) = e^{-\frac{A}{2}t}$$

Population des angeregten Atomniveaus

$$p_a(t) = |c_a(t)|^2 = e^{-At}$$



Exponentieller Zerfall der Population mit Rate A

Lebensdauer: $\tau = \frac{1}{A}$

Beispiel: Übergang $2P \rightarrow 1S$ von atomarem Wasserstoff

$\Delta\tau = \frac{1}{A} \approx 1.6\,ns$ Lebensdauer des 2P Zustands

$\Delta l = c \cdot \Delta\tau \approx 48\,cm$ "Länge des emittierten Lichtpulses"

Lösung für $c_a(t)$ in Gl. (3) einsetzen

$$c_{b\vec{k}\lambda}(t) = -i g_{k\lambda} \int_0^t e^{-i(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda})t' - \frac{A}{2}t'}\,dt'$$

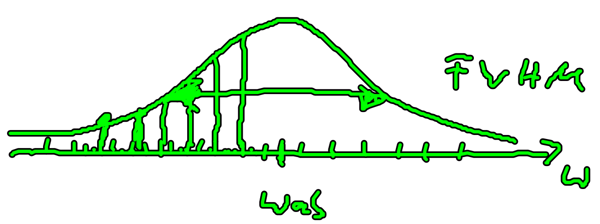
$$= g_{k\lambda}\,\frac{1 - e^{-i(\omega_{ab}-\omega_{k\lambda}) - \frac{A}{2}t}}{(\omega_{k\lambda}-\omega_{ab}) + i\,A/2} \qquad \delta = \omega_{k\lambda} - \omega_{ab}$$

Population der Feldmoden (Atom im Grundzustand)

$$P_{bk\lambda}(t) = |c_{bk\lambda}(t)|^2 = \frac{|g_{k\lambda}|^2}{(\omega_{k\lambda}-\omega_{ab})^2 + A^2/4}\left(1 - e^{-At}\left(1 - e^{+i\delta t} + e^{-i\delta t}\right)\right)$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} P_{b\vec{k}\lambda}(t) = \frac{|g_{k\lambda}|^2}{(\omega_{k\lambda}-\omega_{ab})^2 + A^2/4}}$$

Lorentz-Profil
natürliche Linienbreite
des atomaren Übergangs



FWHM = A

Andere Arten von Linienverbreiterung

- Doppler Verbreiterung

  Annahme: Atome haben Maxwell-Boltzmann Geschwindigkeitsverteilung

  Doppler-Verbreiterung führt zu Linienverbreiterung mit Gauß-Profil

$$P(f) = \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi kT f_0}}\, e^{-\frac{mc(f-f_0)^2}{2kTf_0}}$$

- Druck/Stoßverbreiterung: führt ebenfalls zu Lorentz Profil

Zusammenfassung: Lösung der TDSE im Wigner-Weisskopf Modell

$$|\psi(t)\rangle = e^{-A/2\, t}|a,0\rangle + \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}\, e^{-ik r_0}\left[\frac{1-e^{i(\omega_{k\lambda}-\omega_{ab})t - A/2\, t}}{\omega_{k\lambda}-\omega_{ab}+iA/2}\right]|b,1_{k\lambda}\rangle$$

Position des Atoms

Limit $t \to \infty$

$$|g\rangle = \lim_{t\to\infty}|\psi(t)\rangle = \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}\frac{e^{-ikr_0}}{\omega_{k\lambda}-\omega_{ab}+iA/2}|b,1_{k\lambda}\rangle$$

Detektierbare Photon-Intensität

$$I(rt) = G^{(1)}(rt;rt) = \langle\psi|E^-(rt)E^+(rt)|\psi\rangle$$

$$= \sum_f \langle\psi|E^-(rt)|f\rangle\langle f|E^+(rt)|\psi\rangle$$

Maximal 1 Photon im Zustand

nur Vakuum Zustand trägt bei

$$= \underbrace{\langle\psi|E^-(rt)|0\rangle}_{\chi^*(rt)}\underbrace{\langle 0|E^+(rt)|\psi\rangle}_{=\chi(rt)}$$

"Photonwellenfunktion"

$$= \chi^*(rt)\chi(rt) = |\chi(rt)|^2$$

Intensität für $t\to\infty$, $|\psi(t)\rangle \to |g\rangle$

$$I(rt) = \langle g|E^-(rt)|0\rangle\langle 0|E^+(rt)|g\rangle$$

$$\langle 0 | E^{+}(r,t) | \psi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}} \sum_{\substack{kk' \\ \lambda\lambda'}} \langle 0 | \omega_{k\lambda}^{1/2} g_k e^{-i\omega_{k\lambda}t + ik\cdot r} g_k \frac{e^{-ik\cdot r_0}}{\omega_{k\lambda} - \omega_{as} + iA/2} | 1_{k\lambda} \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}} \sum_{k\lambda} \omega_{k\lambda}^{1/2} g_{k\lambda} e^{-i\omega_{k\lambda}t} e^{ik(r-r_0)} \frac{1}{\omega_{k\lambda} - \omega_{as} + iA/2}$$

$\downarrow$ k-Integration

$$= \underbrace{\frac{\omega_{as} \langle a | \hat{d} | b \rangle \sin\eta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |r - r_0|}}_{E_0} \Theta\left(t - \frac{|r-r_0|}{c}\right) e^{-i\left(t - \frac{|r-r_0|}{c}\right)\left(\omega - iA/2\right)}$$

$$I(r,t) = \frac{|E_0|^2}{|r-r_0|^2} \Theta\left(t - \frac{|r-r_0|}{c}\right) e^{-A\left(t - \frac{|r-r_0|}{c}\right)}$$