

English Summary:

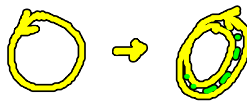
(C) local bifurcations of limit cycles

(C1) Saddle-node bif. of LC



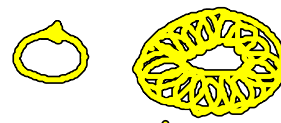
amplitude $\neq 0$
frequency $\neq 0$

(C2) Period doubling



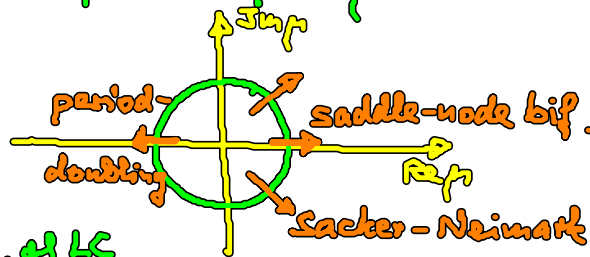
often cascade $2^n T$
period-doubling
route to chaos

(C3) Sacker-Neimark bif.



torus
non-commensurate
frequencies

Floquet multiplier $\mu = e^{\lambda T}$



(D) global bif. of LC

(D1) SNIPER bif.



(D2) homoclinic bif.



amplitude $\neq 0$
freq. $\rightarrow 0$

Einfaches generisches Modell für SNIPER-Bifurkation

(Ditzinger, Ning, Hu: PRE 50, 3508 (94)

Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 87 (93)

Hizanidis, Aud, Schöll: Int. J. Bif. Chaos 18, 1757 (08)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

in Polarcoord. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\dot{r} = r(1-r^2)$$

$$\dot{\varphi} = b - r \cos \varphi$$

$b > 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte.: $r = 0$ (immer instab. Fokus, $\dot{\varphi}$)

$$r = 1, b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b \quad (b < 1)$$

für $b > 1$: LC mit $r=1$, $\dot{\varphi} = b - \cos\varphi > 0 \quad \forall \varphi$

$$\frac{2r}{\sqrt{b^2-1}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos\varphi} = \int_0^T dt = T$$

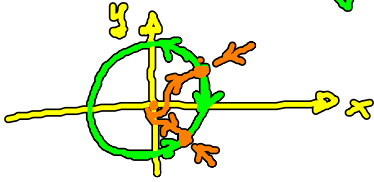
Bif. pkt.: $b=1 \Rightarrow T \rightarrow \infty$ (Frequ. $\rightarrow 0$)

Fixpkt.e auf dem Kreis $r=1$ ($b < 1$):

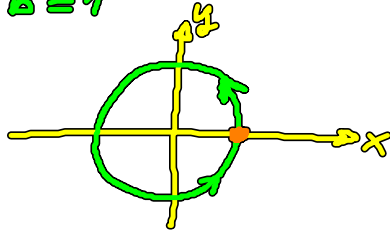
$$(x^*, y^*) = (b, +\sqrt{1-b^2}) \quad \text{Sattelpkt. } (\lambda = \begin{Bmatrix} -2 \\ \sqrt{1-b^2} \end{Bmatrix})$$

$$= (b, -\sqrt{1-b^2}) \quad \text{stab. Kn. } (\lambda = \begin{Bmatrix} -2 \\ -\sqrt{1-b^2} \end{Bmatrix})$$

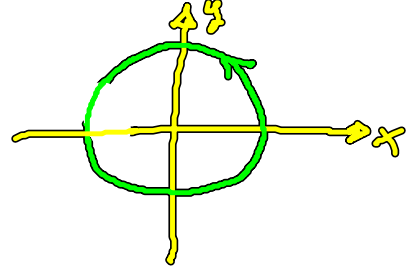
Sattel-Knoten-Bif.: $b=1$



$b < 1$



$b = 1$



$b > 1$

(Anregbarkeit Typ I)

(E) Bifurkation von räumlichen Mustern

$$\dot{\underline{q}}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, p) + D \Delta \underline{q} \quad \text{Diff. konst. } D$$

lineare Stab. der Fixpunkte (räuml. homogen)

$$\underline{S} \underline{q} \sim e^{\lambda t} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$$

\Rightarrow Dispersionsrel. $\lambda(\underline{k})$

$\Rightarrow \text{Re } \lambda(\underline{k}) < 0$ stabil

> 0 instabil

$= 0$ Bif. von räumlich-period. Lösungen mit Wellenvektor \underline{k}

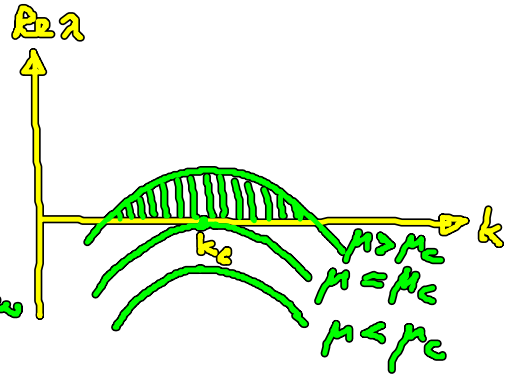
$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q^*) - D_{ij} k^2$$

(E1) Turing-Instabilität

$$\lambda(k) = 0 \quad |k| = k_c \neq 0$$

stationäre, räumlich period. Struktur
mit k_c bifurkiert

(z.B. langsam diffundierender Aktivator u. schneller Inhibitor)



$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

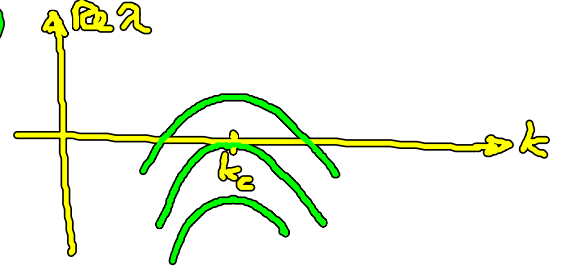
$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

(E2) Stehende / laufende Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c \neq 0$$

oszillierende, räumlich period. Struktur
→ Wellen $S_q \sim e^{i(kx \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

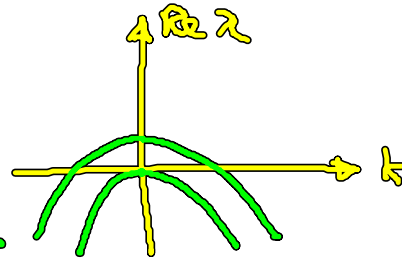


(E3) Hopf-Bifurkation

$$\lambda = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c = 0$$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml.-homog. Grenzzyklen



1.4 Deterministisches Chaos

Deterministische, aber „ungeordnete“ Bewegung
in Langzeitverhalten von Systemen mit $n \geq 3$ (autonom):
seltsamer (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

quasiperiod.	determinist. Chaos	stochastisch (Rauschen)
wenige dyn. Freiheitsgrade: niedrig-dim. Phasenraum		viele mikroskop. Freiheitsgrade (statist. Ensemble) $f \sim 10^{24}$
Attraktor: Torus T^d mit $d=2,3,4, \dots$	seltener Attraktor mit fraktaler Dim.	

Autokorr. fkt. $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$

period. in τ	$\rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow \infty$	$= 0$ für $\tau \geq \tau_c$
-------------------	---	------------------------------

Fourierspektrum (bzw. spektrale Leistungsdichte $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$)
power spectral density

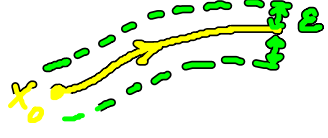
diskrete Freq. $\omega_1, \omega_2, \dots$ | breites Frequenzband

Instab. der Bewegung
bei kleiner Störungen
der Anfangsbed.
 typ. universelle
Bifurkationsverhalten

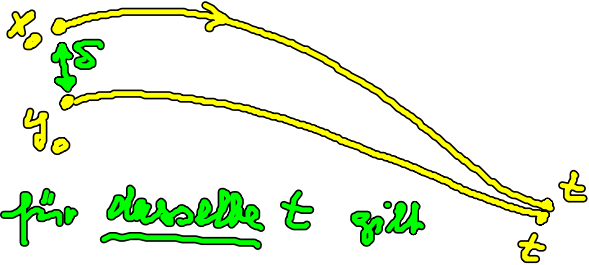
Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen Variationen der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität)


 Bahnstabil
 (alle benachbarten Bahnen bleiben in einer Röhre um $\phi(t, x_0)$)


 asymptot. Bahnstabil
 (Abstand der benachbarten Bahnen $\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$)

asymptot. stabil:

 für dasselbe t gilt

$$|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve $\phi(t, x_0)$:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x(t), t)}_{A_{ik}(t)} \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$: Eigenwerte $\lambda_k(t)$, Eigenvektor $\underline{z}^{(k)}(t)$

formale Lösung:
$$\underline{\delta x}(t) = e^{\int_0^t \underline{A}(t') dt'} \underline{\delta x}(0)$$

Zeitentwicklung einer infinitesimalen Kugel um x_0

$\rightarrow n = \dim$. Ellipsoid mit Hauptachsen $\rho_k(t) \approx \rho_k(0) e^{\bar{\lambda}_k t}$

Def.: Stab. ist bestimmt durch die Lyapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\rho_k(t)}{\rho_k(0)}$$

NE: Führender (größter) Lyapunov-Exp.

$$\lambda := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\underline{x}(t) - \underline{y}(t)|$$

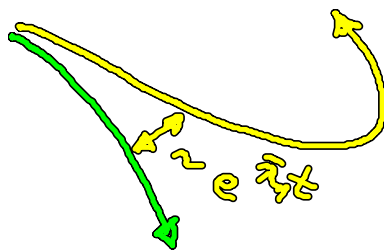
$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$: kleine Abweichungen über Aufh. exp. gedämpft

$\lambda > 0$: expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen

Δ Def. für Chaos

Chaotischer Attraktor in \mathbb{R}^3 : $\bar{\lambda}_1 > 0$, $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_3 < 0$



instab. Ricw. auf dem Attraktor

Goldstone Mode (invar. Mannigf.)

Annäh. an den Attraktor

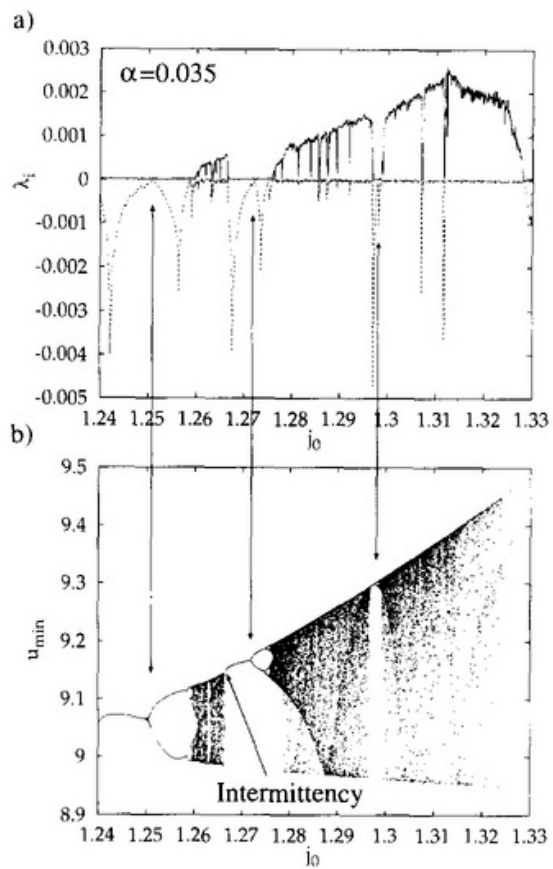


Fig. 8. (a) Lyapunov spectrum, (b) bifurcation diagram for $\alpha = 0.035$