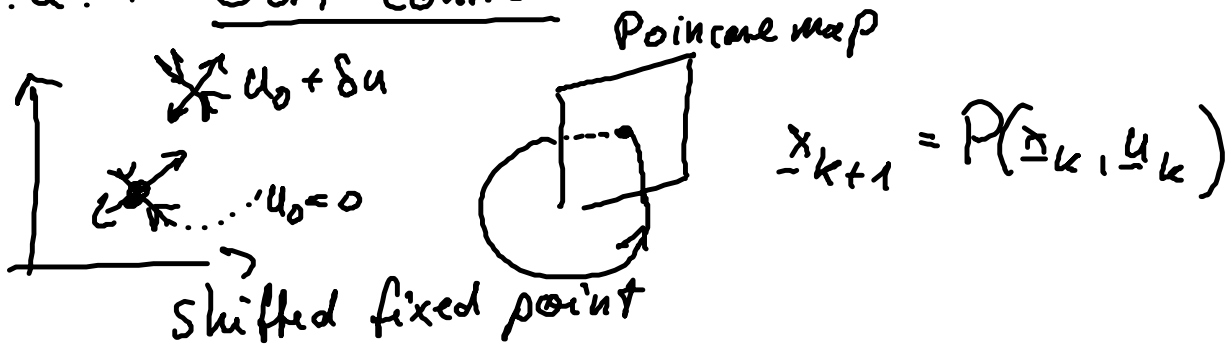


English Summary

2.2 Chaos Control

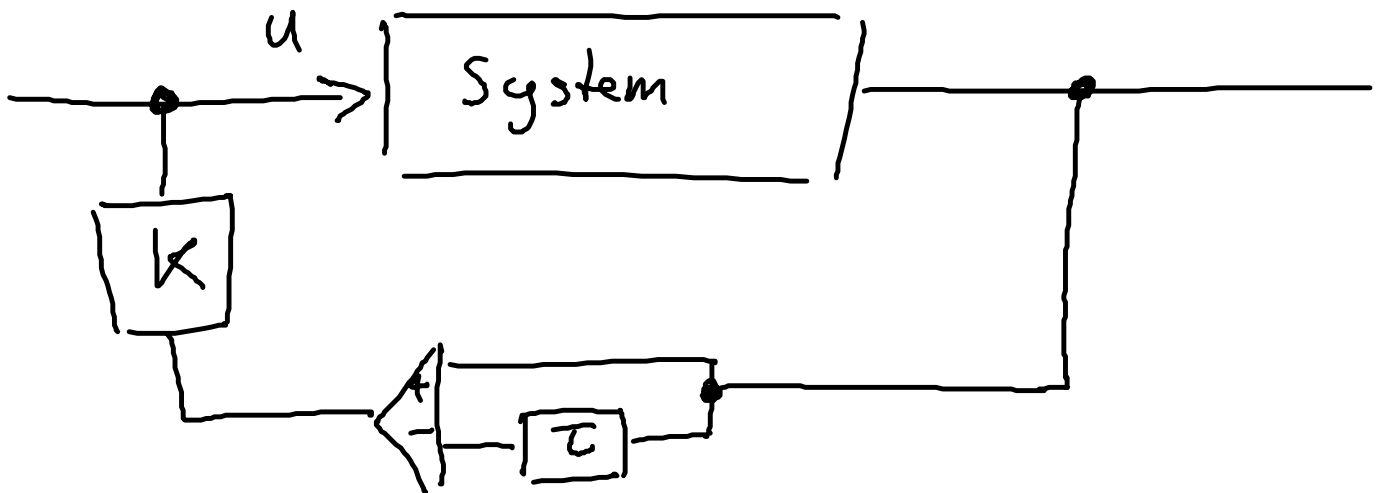
→ stabilization of UPOs embedded in chaotic attractor

2.2.1 OGY control



2.2.2 Time-delayed feedback control

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + \underline{k} [y(t) - y(t-\tau)]$$



2.3. Adaptive Kontrolle

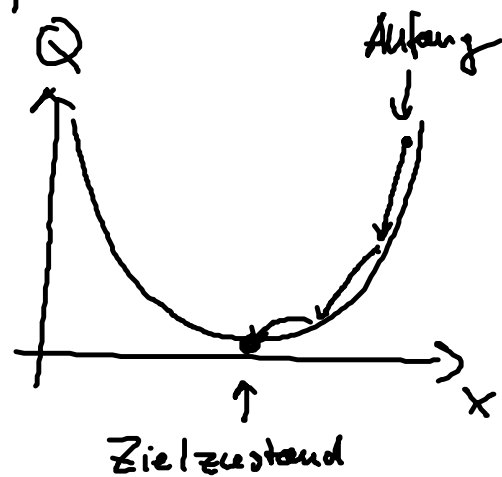
Anwendung bei:

- $\underline{f}(\underline{x}; \underline{p})$ mit unbekanntem Parametern \underline{p}
- Drift der Parameter \underline{p} während der Zeitentwicklung

• Idee: Brauche eine Kostenfunktion

$Q(\underline{x}(t), t)$ &
minimierte Kostenfunktion

- $Q \geq 0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(\underline{x}(t), t) = 0$



dyn. System mit Kontrolle:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad , \quad \underline{x} \in \mathbb{K}^n$$

- Zustandsvektor

$$, \quad \underline{u} \in \mathbb{K}$$

- Kontrollparameter
(input)

→ \underline{u} ist nicht mehr konstant,
sondern zeitabhängig $\underline{u}(t)$!

Idee: Herleitung einer zusätzlichen DGL für \underline{u} ,
die Änderungen von Q berücksichtigt

Speed Gradient Method

- A. Fradkov, Miroshnik, Nikiforov: Nonlinear and Adaptive Control of complex systems (Kluwer, Dordrecht 1999)
- A. Fradkov: Cybernetical Physics: From Control of chaos to quantum control

Speed $Q(x(t), t)$:
$$\dot{Q} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{\substack{\text{hängt} \\ \text{nicht von } u \text{ ab}}} + \underbrace{\nabla_x Q(x, t)}_{f(x, u, t)} \dot{x}$$

Ansatz für $\underline{\dot{u}}$:

$$\underline{\dot{u}} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}$$

- $\Gamma \in \mathbb{R}^+$ - Proportionalitätskonstante
- Relaxationsgleichung
- $-\nabla_u \dot{Q} \hat{=}$ Richtung im u -Raum, in der \dot{Q} am stärksten abnimmt
- $\dot{Q} < 0 \Rightarrow \dot{Q}$ nimmt ab
 $\Rightarrow \dot{Q} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Beispiel: Selbstadaptive Kontrolle der Rückkopplungsstärke k bei zeitverzögerter Rückkopplung: $\underline{k} \hat{=} u$

• Stabilisierung eines Fixpunktes

$$\dot{x} = \lambda x + \omega y - K[x(t) - x(t-\tau)]$$

$$\dot{y} = -\omega x + \lambda y - K[y(t) - y(t-\tau)]$$

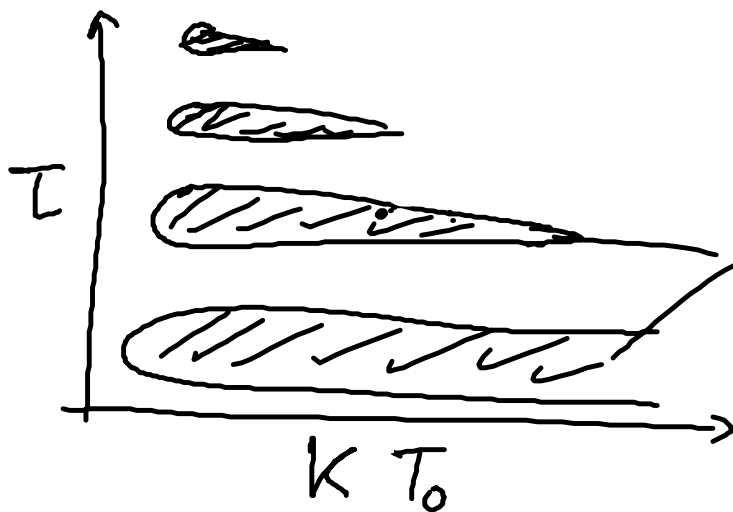
• $\lambda > 0 \hat{=}$ Bifurkationsparameter

• Fixpunkt: $x^* = y^* = 0$

Eigenwerte ($K=0$): $\lambda \pm i\omega$

\Rightarrow instab. Fokus ($\lambda > 0$)

- Ohne adaptive Kontrolle ($K = \text{const}$) ist die zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle nur in "Zungen" in der $K-\tau$ -Ebene erfolgreich



Nur innerhalb der Zungen ist EW des Systems $< 0 \hat{=}$ Stabilisierung erfolgreich

• Adaptive Kontrolle:

- Kostenfunktion aufstellen:

$$Q = \frac{1}{2} \left[(x(t) - x(t-\tau))^2 + (y(t) - y(t-\tau))^2 \right]$$

- Kontrollparameter Dynamik:

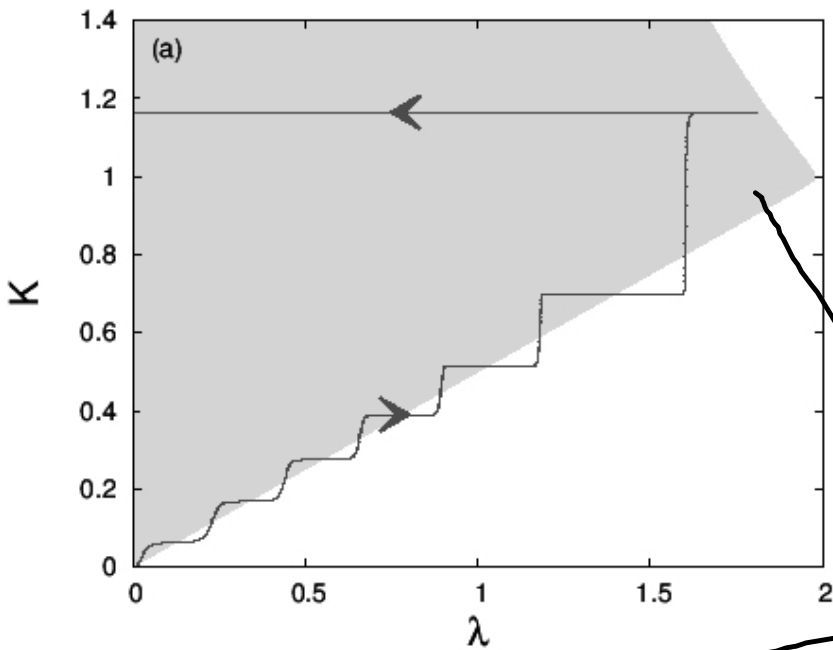
$$\dot{k} = - \Gamma \frac{\partial}{\partial k} Q$$

$$= - \Gamma \left[\left[x(t) - x(t-\tau) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial k} \left[\dot{x}(t) - \dot{x}(t-\tau) \right] + \left[y(t) \dots \right] \right]$$

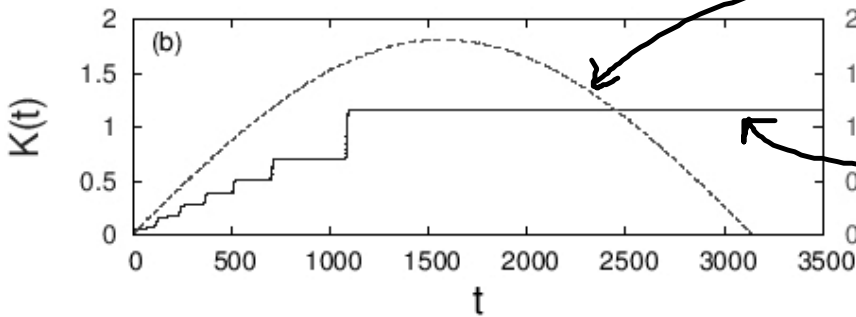
$$= \Gamma \left[\left[x(t) - x(t-\tau) \right] \cdot \left[\underbrace{(x(t) - x(t-\tau))}_{\dot{x}(t)} - \underbrace{(x(t-\tau) - x(t-2\tau))}_{\dot{x}(t-\tau)} \right] + \left[y(t) \dots \right] \right]$$

$$= \Gamma \left[\left[x(t) - x(t-\tau) \right] \left[x(t) - 2x(t-\tau) + x(t-2\tau) \right] + \left[y(t) \dots \right] \right]$$

Lehmer, Hövel,
 Flunkert, Guzunho,
 Fradkov, Schöll
 Chaos 21, 043-111
 (2011)



Stabilisierung möglich

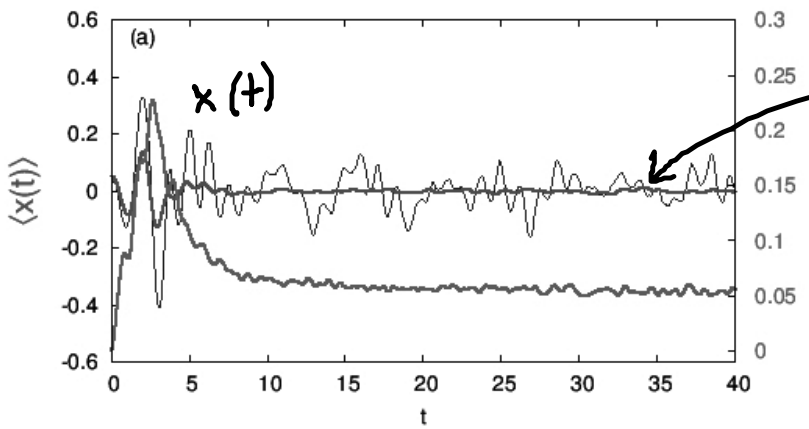


driftende Systemparameter

Kontrollparameter

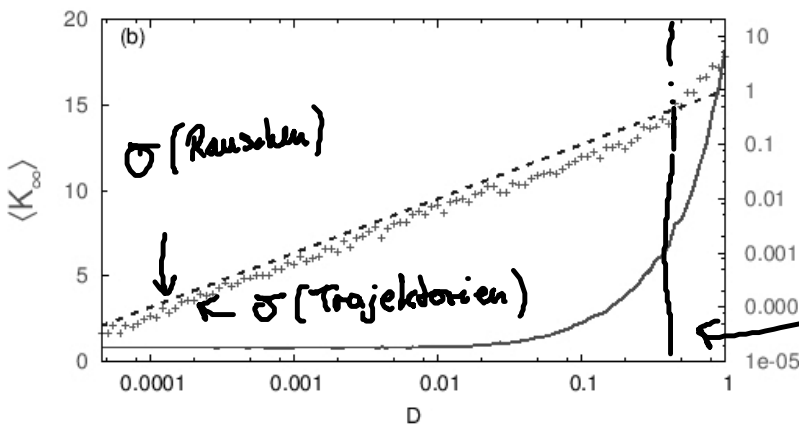
⊕ robust gegen Rauschen!

$$\dot{x} = f(x) + D\xi(t)$$



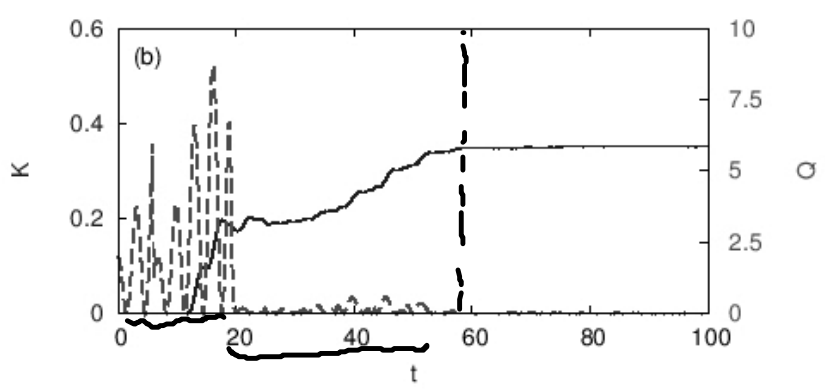
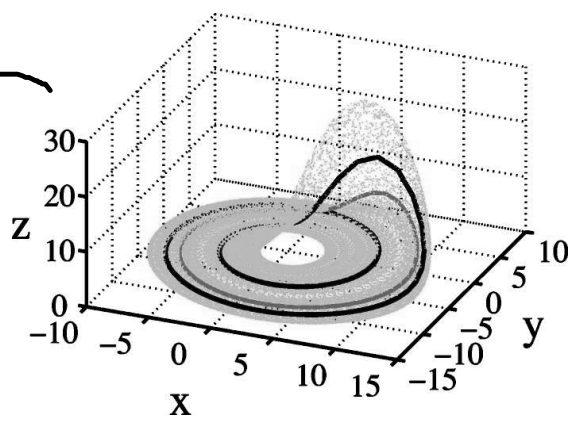
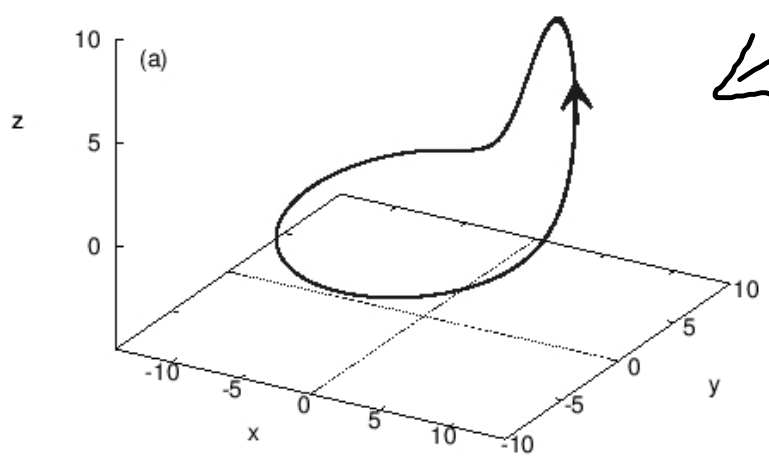
über 200 Simulationen gemittelt

Standardabweichung



Kontrolle versagt bei zu großer Rauschamplitude

- Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits
 - Rössler-System (chaotisch)
 erfolgreiche Stabilisierung (ohne Transiente):



$$\rightarrow \tau = 5.9 = \tau_{\text{upo}}$$

2.4. Quantenkontrolle

- Kostenfunktion enthält Hamiltonian:

$$Q(q, p) = \frac{1}{2} (H(q, p) - H_*)^2$$

mit H_* als Zielenergie

- Quantenmechanische Systeme
Schrödinger-Gl. : $i\hbar \partial_t \Psi = \left(H_0 + \sum_{k=1}^m u_k H_k \right) \Psi$

ohne Kontrolle
(freies System)

Kontroll-Hamiltonian
mit Kontrollparameter
 u_k

- Ziel : Konstruiere u_k , so dass Observable Z im Mittel einen vorgegebenen Wert Z_* annimmt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \Psi^*(t) | Z | \Psi(t) \rangle}_{\text{Skalarprodukte}} = Z_*$$

Skalarprodukte :

$$\int \Psi^* Z \Psi d\tau = \langle \Psi | Z | \Psi \rangle$$

- Anwendung von speed gradient method :

$$- Q(\Psi) = \frac{1}{2} \left(\langle \Psi^* | Z | \Psi \rangle - Z_* \right)^2$$

$$- \lim_{t \rightarrow \infty} Q(\Psi) = 0$$

- Annahme : Z kommutiert mit H_0

→ beide müssen gleichzeitig schaltbar sein, ansonsten Beeinflussung des gen Systems durch Messung für \dot{Q}

$$\begin{aligned} \nabla_{u_k} \dot{Q} &= \nabla_{u_k} \left[(\psi^* Z \psi - z_*) (\dot{\psi}^* Z \psi + \psi^* Z \dot{\psi}) \right] \\ &= \nabla_{u_k} \left[(\psi^* Z \psi - z_*) \frac{i}{\hbar} \psi^* (H_0 Z - Z H_0 + \dots + \sum_{l=1}^m u_l (H_l Z - Z H_l) \psi) \right] \end{aligned}$$

mit $\dot{\psi} = -\frac{i}{\hbar} (H_0 + \sum_l u_l H_l) \psi$

Ansatz:

$$\dot{u}_k = -\nabla_{u_k} \dot{Q}$$

$$= -\nabla_{u_k} \frac{i}{\hbar} (\psi^* Z \psi - z_*) (\psi^* (H_k Z - Z H_k) \psi)$$

⇒ adaptive Gl. für Kontrollparam. u_k

Anwendung:

- Kontrolle chem. Reaktionen auf molekularer Ebene
- Kontrolle durch speziell geformte Laserpulse, die gewünschte Reaktionskanäle öffnen

lit: T. Brixner (Wienzburg):

Phys. Chem. 9, 2470 (2007)

Chem. Phys. 4, 418 (2008)