

English Summary:

Feedback control with distributed delay

$$\dot{z}_i = (1 + i\omega_0)z_i - |z_i|^2 z_i + Ke^{i\theta} \left[\int_0^\infty g(t') z_j(t-t') dt' - z_i(t) \right] \quad i,j=1,2$$

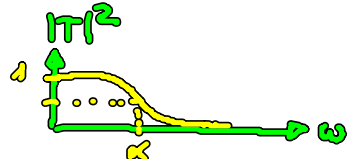
$$1 + i\omega_0 - Ke^{i\theta} - \lambda = \pm Ke^{i\theta} \mathcal{L}g(\lambda) \quad \mathcal{L}g(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t') dt'$$

uniform kernel 

Laplace Transform delay kernel

exponential kernel  $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$

$\hat{=}$ low pass filter $\hat{Y}(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + i\omega} \hat{z}(\omega)$
 $T(\omega)$ transfer fct

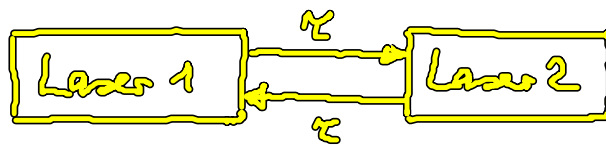


$$\hat{=} \dot{z}_i = \dots + Ke^{i\theta} (Y_j - z_i), \quad \dot{Y}_j = -\alpha Y_j + \alpha z_j \Rightarrow Y_j = \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} \alpha z_j(s) ds$$

4. Gekoppelte Systeme und Netzwerke

4.1 Zwei gekoppelte Hopf-Normalformen

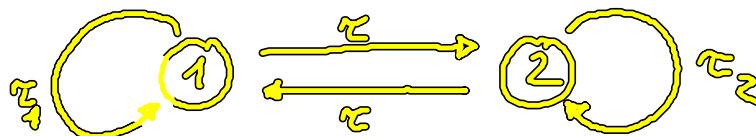
Motivation: (i)



Signallaufzeit $\tau \neq 0$

Frage: wann sind beide Laser synchronisiert

(ii) Neuronen



$\tau, \tau_1, \tau_2 \neq 0$ i.a. (Signallaufzeit, neurovaskuläre Koppl., Ionen austausch durch Zellmembran)

2 subkritische Hopf-Normalformen: $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + (1 + i\mu)|z_1|^2)z_1 + a(z_2 - z_1)$$

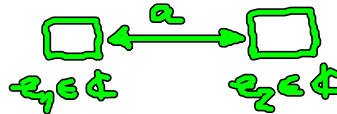
$$\dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + (1 + i\mu)|z_2|^2)z_2 + a(z_1 - z_2)$$

diffusive Kopplung

Lit.: B. Fiedler, Flunkert, Hövel, Schöll. Phil. Trans. R. Soc. A 368, 319 (2010)

oBdA: $\omega = 1$

Hopf-Normalform (ohne Kopplung)



mit Kopplung: System beschrieben durch 4 dyn. Var. $\underline{z} = \begin{pmatrix} \text{Re } z_1 \\ \text{Im } z_1 \\ \text{Re } z_2 \\ \text{Im } z_2 \end{pmatrix}$

Synchroner Zustand ($z_1(t) = z_2(t) = z_{\text{sync}}(t)$)

⇒ Kopplung verschwindet: 2 identische Systeme

$$z_{\text{sync}} = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \dot{z}_{\text{sync}} = \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i + (1 + i\mu)r^2) r e^{i\varphi}$$

$$\text{Re: } \dot{r} = (\lambda + r^2)r$$

$$\text{Im: } \dot{\varphi} = 1 + \mu r^2$$

- instabiler period. Orbit (UPO): $r = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$

$$r_{\text{sync}} = \sqrt{-\lambda}$$



$$\text{Phase des UPO: } \varphi = \omega t = \frac{2\pi}{P_+} t$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{P_+} = 1 + \mu r_{\text{sync}}^2 = 1 - 2\mu$$

$$P_{\text{sync}} = P_+ = \frac{2\pi}{1 - 2\mu}$$

- Lösung für synchron. Zustand

$$z_{\text{sync}} = \sqrt{-\lambda} \exp\left[\frac{2\pi i}{P_{\text{sync}}} t\right]$$

Weitere spezielle invariante Lösungen im gekoppelten System:

Verwende neue Koord.: $z_+ = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ symm., synchron.

$z_- = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$ antisymm., gegenphasig

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = \frac{1}{2} \left[f(z_1) + f(z_2) + a(z_2 - z_1) + a(z_1 - z_2) \right]$$

Hopf-NF

$$= \frac{1}{2} [f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)]$$

$z_1 = z_+ + z_-$
 $z_2 = z_+ - z_-$

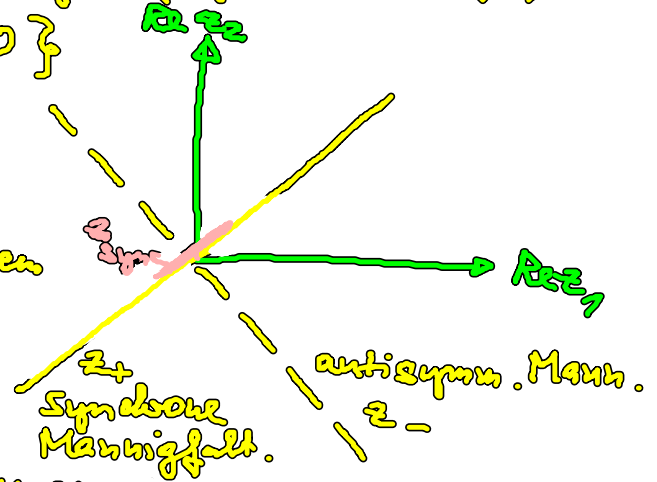
$$\dot{z}_- = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = \frac{1}{2} [f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)] - 2az_-$$

- Menge gleichphasiger Lösungen (synchr. Lösungen)

$$Z_+ := \{ (z_+, z_-) \mid z_- = 0 \}$$

$$z_+ = z_{\text{sync}}$$

also $\dot{z}_{\text{sync}} = f(z_{\text{sync}})$
wie ungekoppeltes System



- Menge der gegenphasigen Lösungen

$$Z_- := \{ (z_+, z_-) \mid z_+ = 0 \}$$

$$\text{d. h. } z_1 = -z_2$$

$$\Rightarrow \dot{z}_+ = \frac{1}{2} (f(0 + z_-) + f(0 - z_-))$$

$$= \frac{1}{2} (f(z_-) - f(-z_-)) = 0$$

da f kub. Fkt.
(ungerade) von z

$$\Rightarrow \text{Lösung für } z_- : \dot{z}_- = \frac{1}{2} (f(z_-) - f(-z_-)) - 2az_-$$

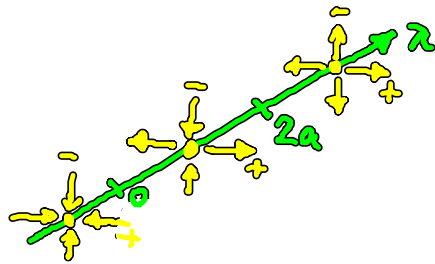
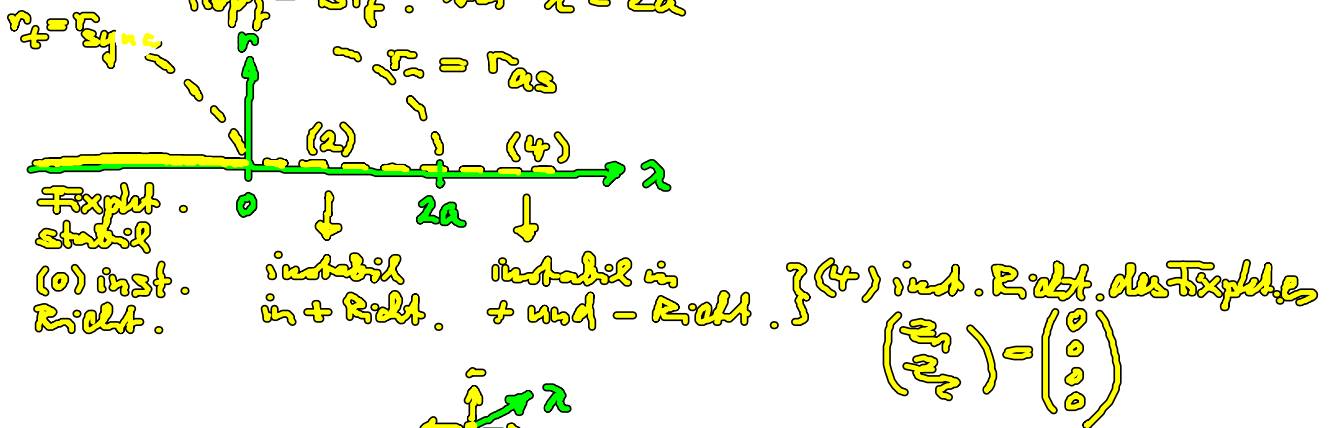
$$= f(z_-) - 2az_-$$

$$z_{as} = z_- = r_- \exp\left[\frac{2\pi}{P_-} t\right] = (\lambda + i + (1 + ip)) |z_-|^2 z_- - 2az_-$$

mit $r_- = \sqrt{-(\lambda - 2a)}$

Periode $P_- = \frac{2\pi}{1 + r_-^2 p} = \frac{2\pi}{1 - (\lambda - 2a)p}$

Fazit: Gegenphasiger period. Orbit verschwindet in einer Hopf-Bif. bei $\lambda = 2a$



Wunsch: Stabilisierung der period. Lösungen r_+ , r_-

Möglich durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

(i) r_{sync} wurde in §3.2.2 durch Wahl $\tau = p_+$ stabilisiert

(ii) r_{as} stabilisierbar durch zeitverzögerte Rückkoppl.kontrolle mit halber Periode $\tau = \frac{P_-}{2}$

(Stab. des Fixp. soll umgedreht werden: $\rightarrow \uparrow \leftarrow -$)

Begründung: $z_-(t - \frac{P_-}{2}) = r_- \exp\left(\frac{2\pi i (t - \frac{P_-}{2})}{P_-}\right)$

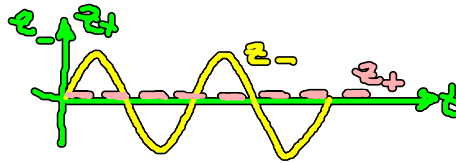
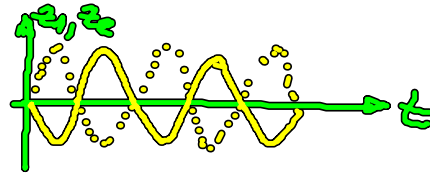
$$= r_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right) \underbrace{\exp(-\pi i)}_{-1}$$

$$= -r_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right)$$

$$\Rightarrow z_+(t) = z_+ + z_- = z_-(t) = -z_-(t - \frac{P_-}{2}) = z_-(t - \frac{P_-}{2})$$

analog: $z_2(t) = z_1(t - \frac{\tau}{2})$

gegenphasige Osz.



Systemgl. mit nichtinvarianter Kontrolle: $b \in \mathbb{C}$

$$(I) \dot{z}_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b(z_2(t-\tau) - z_1(t))$$

$$(II) \dot{z}_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_1(t-\tau) - z_2(t))$$

= 0 für $\tau = \frac{\tau}{2}$ auf z_-

NB: Diese Kontrolle ist invariant auf dem gleichphasigen Orbit z_+

Frage: Welche b stabilisieren z_- ?

In z_+ und z_- -Koordinaten lautet (I), (II):

$$(I') \dot{z}_+ = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$(II') \dot{z}_- = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) - 2az_- + b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

Strategie zum Nachweis der Stabilisierung von $z_- = r_- e^{i\varphi_-}$:
 Untersuchen Stabilität des Fixp. in Ursprung!

⇒ linearisiere (I'), (II') um $z_1 = z_2 = 0$ ($z_+ = z_- = 0$)

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2}[(\lambda + i)(z_+ + z_-) + (\lambda + i)(z_+ - z_-)] + b[z_+(t-\tau) - z_+(t)]$$

$$= (\lambda + i)z_+ + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$\dot{z}_- = (\lambda - 2a + i)z_- - b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

NB: Linearisierung entkoppelt z_+ und z_-

Ausatz $z_{\pm} \sim e^{\lambda t}$ (λ Eigenwert)

Untersuche Stabilität des Fixpt. bei $\lambda = 2a$ mit $\tau = \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2(1 - (2-2a)\mu)} = \pi$$

\uparrow
 $\lambda = 2a$ (am Bif. pt. von z_{2a})

char. Gln. (am Bif. pt. $\lambda = 2a$):

$$z_+ : 0 = \lambda + i + b(e^{-\lambda T} - 1) - \tau$$
$$= \underset{\uparrow}{2a} + i + b(e^{-2\pi} - 1) - \tau \quad \textcircled{+}$$

$$z_- : 0 = \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} + i - b(e^{-\lambda T} - 1) - \tau \quad \textcircled{-}$$

Suche Hopf-Kurven in $(\text{Re } b, \text{Im } b)$ -Ebene, die $\text{Re } \tau = 0$ erfüllen, d.h. Grenzen, an denen die instab. Dim. des Fixp. sich ändert. Dann wird ein delay-induzierter Orbit generiert, der zum Stab. austausch mit dem gegenläufigen Pyragas-Orbit gebraucht wird (transkrit. Bif.).

Parametrisierung der Hopf-Kurven ($\tau = 0 + i(1 + 2\omega)$) $b = b(\omega)$

↳ Einsetzen in $\textcircled{+}$ und
Umformung nach b
liefert $b_+(\omega)$ -Kurve
↳ Einsetzen in $\textcircled{-}$
liefert $b_-(\omega)$

$$b_+(\omega) = a + \omega \tan(\pi\omega) + i(-\omega + a \tan \pi\omega)$$

$$b_-(\omega) = -\omega \cot(\pi\omega) - i\omega$$

